Intervalos de Confiança

1. Introdução

Neste capítulo, começaremos a estudar efetivamente a Inferência Estatística. Até agora, estudamos alguns estimadores pontuais. O problema de uma estimativa pontual é que ela raramente se iguala ao parâmetro exato (média, desvio padrão ou proporção) de uma população. Daí surge a necessidade de fazer estimativas mais significativas, especificando um intervalo de valores em uma linha de número juntamente com a afirmação de quão confiante você está de que seu intervalo contém o parâmetro populacional.

2. Estimativa por intervalo, o nível de confiança e de significância

Uma estimativa por intervalo para um parâmetro populacional é um intervalo determinado por dois números, obtidos a partir de elementos amostrais, que se espera que contenham o valor do parâmetro (populacional) com um dado **nível de confiança** γ (lê–se: "gama"). Geralmente, trabalhamos com 90% ≤γ ≤ 99%. Valores menores que 90% para o nível de confiança não são utilizados, pois possuem pouca "precisão", ou seja, a confiabilidade é muito "pequena". Valores acima de 99%, embora consistam em uma confiança elevada, acarretam problemas de cálculo: ou obtemos intervalos muito grandes ou necessitamos de amostras muito grandes, o que pode inviabilizar a pesquisa, a coleta de dados, elevando o seu custo.

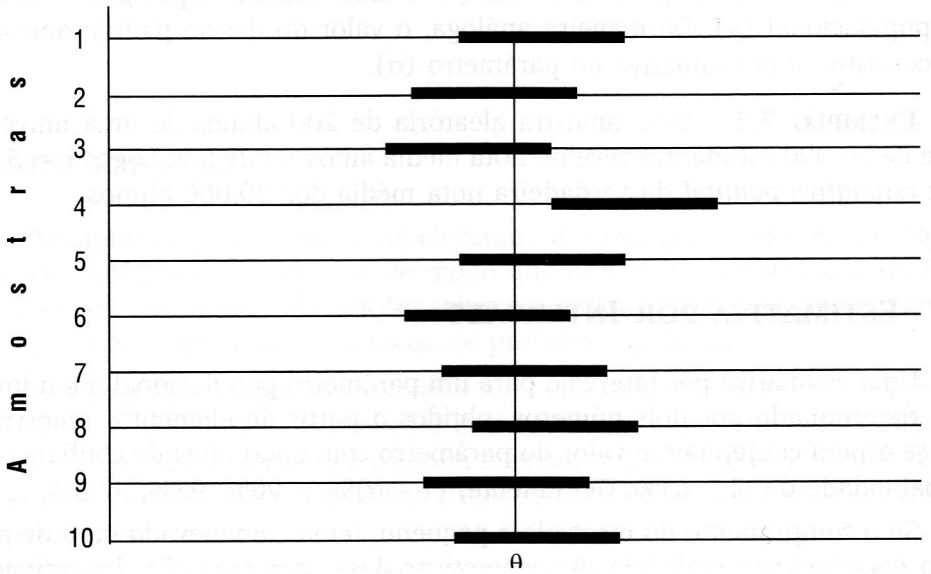
Em algumas situações, pode ser dado, ao invés do nível de confiança, o **nível de significância** α. A relação entre eles é que

$$\gamma = 1 - \alpha.$$

É importante atentar para o risco do erro, quando se constrói um intervalo de confiança. Se o nível de confiança é de 95%, o risco do erro da inferência estatística será de 5%. Assim: se construíssemos 100 intervalos, baseados em 100 amostras de tamanhos iguais, poderíamos esperar que 95 desses intervalos (95% deles) iriam conter o parâmetro populacional sob estudo, enquanto cinco intervalos (5% deles) não iriam conter o parâmetro.

Para exemplificar, vamos supor θ um parâmetro populacional. Vamos admitir a seleção de 10 amostras de mesmo tamanho e um nível de confiança de 90%. A figura seguinte mostra os intervalos obtidos.

Os segmentos horizontais representam os 10 intervalos, e a reta vertical representa a localização do parâmetro θ. Nota-se que o parâmetro é fixo e que a localização do intervalo varia de amostra para amostra. Por conseguinte, **podemos falar em termos da "probabilidade de o intervalo incluir θ ", e não em termos da "probabilidade de θ pertencer ao intervalo"**, já que θ é fixo. O intervalo é aleatório. Na prática, **somente um intervalo é construído** por meio da amostra aleatória obtida. Como utilizamos uma confiança igual a 90%, perceba que apenas **9 dos 10 intervalos construídos contém o verdadeiro parâmetro θ:**



Configuração: 10 intervalos de confiança para θ a partir de 10 amostras de mesmo tamanho e (1 – α)% =90%.

Dessa forma, podemos fazer uma **interpretação genérica de um intervalo de confiança:** *se obtivermos várias amostras de mesmo tamanho e para cada uma calcularmos os correspondentes intervalos de confiança com coeficiente (ou nível) de confiança γ, esperamos que a proporção de intervalos que contenham o valor do parâmetro θ seja igual a γ.*

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

3. Intervalo de Confiança para a Média Populacional quando a Variância é Conhecida

Neste primeiro tópico, mostraremos a lógica para se obter um intervalo de confiança. Nos casos seguintes, a técnica é a mesma e, por isso, seremos mais breves nas explicações teóricas.

Como vimos anteriormente, a distribuição de probabilidade da média amostral é

$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ para populações infinitas e

$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$ para populações finitas.

Assim, para populações infinitas, a variável normal padrão de $\overline{X}$ será denominada $\mathbf{Z_{observado}}$:

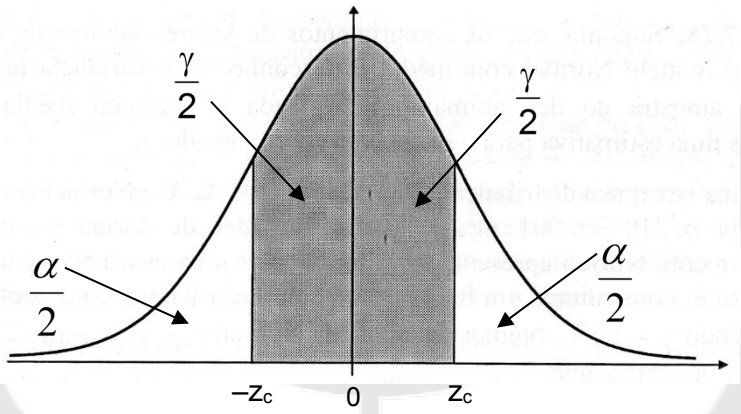
$$Z_{obs} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Para populações finitas, deve–se acrescentar o fator de correção populacional ao cálculo de $Z_{observado}$:

$$Z_{obs} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Lembre–se: o fator de correção deve ser usado sempre que tivermos $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

Fixado um nível de confiança γ, devemos utilizar a **tabela da Normal Padrão** para determinar os **valores críticos da variável Z**, ou seja, $\mathbf{z_{crítico}}$, conforme mostra a figura:



O intervalo de confiança para a média populacional é tal que:

$$P\left(\overline{x} - z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

De forma mais simples, podemos escrever que o intervalo de confiança para a média populacional, quando a variância for conhecida é:

$$IC = \overline{x} \pm z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

onde o termo $z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é chamado de **erro** (ou **erro máximo da estimativa** ou **tolerância de erro**).

Caso se utilize o **fator de correção**, temos:

$$IC = \overline{x} \pm z_c . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

onde o termo $Z_c . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ é chamado de **erro** (ou **erro máximo da estimativa** ou **tolerância de erro**).

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 1

A duração da vida de uma peça de equipamento é tal que $\sigma = 5$horas. Foram amostradas aleatoriamente 100 dessas peças, obtendo–se média de 500 horas. Desejamos construir um intervalo de confiança para a verdadeira duração média da peça com um nível de 95% de confiança.

Inicialmente, vamos obter o valor crítico da distribuição utilizando a tabela da Normal Padrão: queremos encontrar os valores z_c e $-z_c$ de modo que a probabilidade dos valores compreendidos entre z_c e $-z_c$ seja igual a 95%, ou seja, ao nível de confiança. Como a curva é simétrica, temos que a área compreendida entre 0 e z_c vale 95% / 2 = 47,5%. Logo, devemos buscar o valor que mais se aproxima de 0,475 na tabela:

Distribuição Normal: Valores de p tais que P(0 ≤ Z ≤ z) = p

Parte inteira e primeira decimal de z	Segunda casa decimal de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817

Assim, percebemos que, coincidentemente, há o valor 0,475 exato, correspondendo a um valor crítico z_c**=1,96**. Agora, basta aplicarmos a fórmula:

$$IC = \overline{x} \pm z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 \pm 1{,}96.\frac{5}{\sqrt{100}} = 500 \pm 0{,}98.$$

Portanto, os limites do nosso intervalo serão:

500 + 0,98 = 500,98 e

500 – 0,98 = 499,02.

Ou seja,

$$P(499{,}02 \leq \mu \leq 500{,}98) = 0{,}95.$$

Ou, ainda, de maneira mais simples:

IC = [499,02 ; 500,98].

Interpretação: o intervalo [499,02 ; 500,98] contém a verdadeira duração média da peça com 95% de confiança. Isso significa que, se forem construídos intervalos dessa mesma maneira, 95% desses intervalos devem conter μ.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 2

Vamos considerar o exemplo anterior, mas, agora, suponha que tenhamos uma população de 1000 peças.

Nesse caso, o intervalo para a média será:

$$IC = \overline{x} \pm z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 500 \pm 1{,}96.\frac{5}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}} = 500 \pm 0{,}93.$$

Logo, o intervalo procurado é: **IC = [499,07 ; 500,93]**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

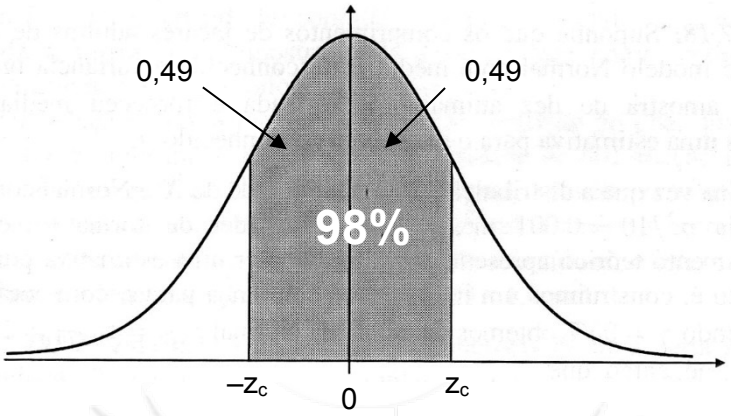
Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 3

Suponha que os comprimentos de jacarés adultos de uma certa raça sigam o modelo Normal com média μ desconhecida e variância igual a 0,01 m^2. Uma amostra de dez animais foi sorteada e forneceu média 1,69 m. Obtenha uma estimativa para o parâmetro μ com uma confiança de 98%.

Inicialmente, devemos observar que foi dado que σ^2=0,01 m^2. Logo, σ =0,1 m.

Utilizando a tabela da normal para encontrar z_c temos:



Distribuição Normal: Valores de p tais que P(0 ≤ Z ≤ z) = p

Parte inteira e primeira decimal de z	Segunda casa decimal de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936

Ou seja, z_c **= 2,33**.

Aplicando a fórmula, temos:

$$IC = \overline{x} \pm z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}69 \pm 2{,}33.\frac{0{,}1}{\sqrt{10}} = 1{,}69 \pm 0{,}07$$

Calculando os limites inferior e superior do IC, obtemos:

1,69 – 0,07 = 1,62 e 1,69 + 0,07 = 1,76.

Assim: **IC = [1,62 ; 1,76].**

Alternativamente, poderíamos escrever: $P(1{,}62 \leq \mu \leq 1{,}76) = 0{,}98$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 4

Deseja–se estimar o número médio de frases em anúncios de revistas. De estudos anteriores, sabe–se que a distribuição é Normal com desvio padrão igual a 5 frases. Quantos anúncios de revista devem ser incluídos na amostra se você quer ter 95% de confiança e não errar mais do que 1 frase da média populacional?

Vimos que o erro é dado por $E = z_c.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Para uma confiança de 95%, já vimos que, a partir da tabela da Normal, z_c=1,96. Substituindo os valores temos:

$$1 = 1{,}96.\frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \left(\frac{1{,}96.5}{1}\right) \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}96.5}{1}\right)^2 \Rightarrow n = 96{,}04.$$

Quando necessário, o resultado deve ser **arredondado para o primeiro valor inteiro maior** que o valor de **n** calculado.

Neste caso, n=97, ou seja, devemos incluir pelo menos 97 anúncios de revista na amostra.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4. Intervalo de Confiança para a Média Populacional quando a Variância é Desconhecida

Quando temos **pequenas amostras** e **não conhecemos o valor do desvio padrão populacional**, construímos intervalos de confiança para a média populacional utilizando a **distribuição t de Student** para encontrar os valores críticos (t_c) com **(n–1) graus de liberdade**.

Populações infinitas:

$$IC = \overline{x} \pm t_c . \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Populações finitas:

$$IC = \overline{x} \pm t_c . \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

Note que, agora, trabalhamos com o **desvio padrão amostral s**, visto que o populacional é desconhecido.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4.1. A distribuição t de Student

Possui as seguintes características:

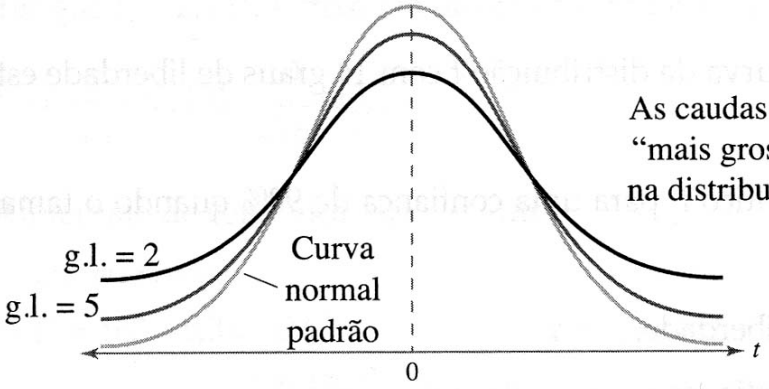
1) A distribuição **t** tem a forma de sino e é simétrica em relação à média.

2) A distribuição **t** é uma família de curvas, cada uma determinada por um parâmetro chamado de grau de liberdade. Os **graus de liberdade** são o número de escolhas livres deixadas depois que uma amostra estatística tal como $\overline{x}$ é calculada. Quando usamos a distribuição **t** para estimar a média da população, os graus de liberdade são iguais ao tamanho da amostra menos um: **g.l. = n – 1**.

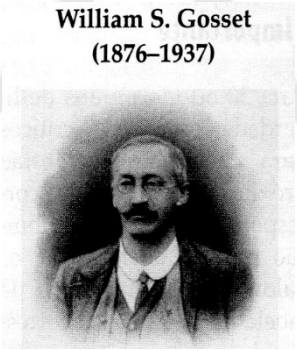
3) A área total sob a curva é 1 ou 100%.

4) A média, moda e mediana da distribuição t são iguais a zero.

5) Conforme os graus de liberdade aumentam, a distribuição t se aproxima da distribuição Normal. Para **mais de 30 graus de liberdade**, a distribuição t está tão próxima da Normal, que podemos trabalhar diretamente com a tabela da Normal Padrão.



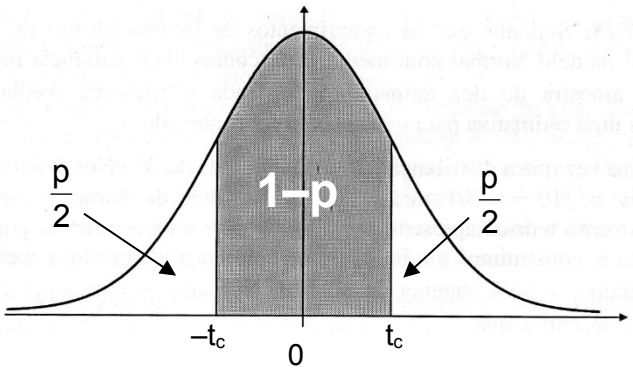
4.2. Nota histórica



William S. Gosset desenvolveu a distribuição **t** enquanto trabalhava na indústria de cervejas Guinness, em Dublin, na Irlanda. Gosset publicou suas descobertas usando o pseudônimo de Student. A distribuição **t** às vezes é chamada de distribuição **t de Student**.

4.2. A tabela da distribuição t de Student

Na tabela, além dos graus de liberdade, você deverá procurar a coluna correspondente a **p**, conforme ilustra a figura seguinte:



A soma das duas caudas da curva é igual ao valor de p.

Ou seja, o **nível de significância** γ corresponde ao valor **1 – p**.

Distribuição t-Student: valores **tc** tais que P(-**tc** ≤ t ≤ **tc**) = 1 - p

Graus de Liberdade	p ►	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	8%	6%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%
	1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	318,309	636,619
	2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,599
	3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	10,215	12,924
	4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	7,173	8,610
	5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	5,893	6,869
	6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959
	7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408
	8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041
	9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781
	10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587
	11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437
	12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318
	13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221
	14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140
	15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,733	4,073
	16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015
	17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965
	18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922
	19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883
	20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850
	21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819
	22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792
	23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768
	24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745
	25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,450	3,725
	26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707
	27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690
	28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674
	29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659
	30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646
	31	0,127	0,256	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,375	3,633
	32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,365	3,622
	33	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,053	1,308	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,356	3,611
	34	0,127	0,255	0,389	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,348	3,601
	35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591
	36	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	1,802	1,942	2,028	2,131	2,434	2,719	3,333	3,582
	37	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,305	1,687	1,800	1,940	2,026	2,129	2,431	2,715	3,326	3,574
	38	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	1,799	1,939	2,024	2,127	2,429	2,712	3,319	3,566
	39	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,304	1,685	1,798	1,937	2,023	2,125	2,426	2,708	3,313	3,558
	40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	1,796	1,936	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551
	45	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,301	1,679	1,791	1,929	2,014	2,115	2,412	2,690	3,281	3,520
	50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	1,787	1,924	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496
	55	0,126	0,255	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,297	1,673	1,784	1,920	2,004	2,104	2,396	2,668	3,245	3,476
	60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	1,781	1,917	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460
	70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,776	1,912	1,994	2,093	2,381	2,648	3,211	3,435
	80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,773	1,908	1,990	2,088	2,374	2,639	3,195	3,416
	90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,771	1,905	1,987	2,084	2,368	2,632	3,183	3,402
	100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,769	1,902	1,984	2,081	2,364	2,626	3,174	3,390
	110	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,659	1,767	1,900	1,982	2,078	2,361	2,621	3,166	3,381
	120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,766	1,899	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373
	∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 5

A amostra 9, 8, 12, 7, 9, 6, 11, 6, 10, 9 foi extraída de uma população Normal. Construa um intervalo de confiança para a média ao nível de 95%.

Resolução

Inicialmente, utilizando as fórmulas da Estatística Descritiva, devemos calcular a média e o desvio padrão dessa amostra.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{87}{10} = 8{,}7 \text{ e } s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = 2{,}00.$$

Os graus de liberdade da distribuição são: g.l.= n–1 = 10–1 = 9.

Para usarmos a tabela, devemos observar a coluna correspondente a p=5% (pois 100% – 95% = 5%):

Distribuição t-Student: valores **tc** tais que P(-**tc** ≤ t ≤ **tc**) = 1 - p

p ►	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	8%	6%	5%	4%	2
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,

Logo, o valor crítico procurado é t_c=2,262. Substituindo na fórmula temos:

$$IC = \overline{x} \pm t_c . \frac{s}{\sqrt{n}} = 8{,}7 \pm 2{,}262 . \frac{2{,}00}{\sqrt{10}} = 8{,}7 \pm 1{,}43.$$

Assim, calculando o limite inferior e superior do intervalo, obtemos:

IC = [7,27 ; 10,13], que é o intervalo que contém a verdadeira média (populacional) com 95% de confiança.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 6

Você seleciona aleatoriamente 20 instituições que realizam financiamento para compra da casa própria e determina o atual índice de juros do financiamento em cada uma delas. A média da amostra dos juros é de 6,22%, com desvio padrão de 0,42%. Encontre o intervalo de confiança de 99% para a média populacional do índice de juros do financiamento. Assuma que os índices de juros são aproximadamente normalmente distribuídos.

Resolução

Inicialmente, podemos verificar, a partir do enunciado, que $\overline{x}$=6,22 e s=0,42. Sendo n=20 temos g.l.=20–1=19.

Observando a tabela t para g.l.=19 e p=1%, encontramos t_c=2,861. Aplicando a fórmula:

$$IC = \overline{x} \pm t_c.\frac{s}{\sqrt{n}} = 6{,}22 \pm 2{,}861.\frac{0{,}42}{\sqrt{20}} = 6{,}22 \pm 0{,}27.$$

Logo: **IC = [5,95 ; 6,49].**

Interpretação: com 99% de confiança, podemos dizer que a média populacional do índice de juros do financiamento está entre 5,95% e 6,49%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

5. Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional

Agora, queremos construir um intervalo de confiança para a proporção populacional **p**. Lembrando que a estimativa pontual de **p** é dada pela proporção de sucessos em uma amostra e é denotada por

$$\hat{p} = \frac{número \text{ de sucessos em uma amostra}}{tamanho \text{ total da amostra}}$$

E, ainda, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, que é a proporção amostral de fracassos.

Antes de construir um intervalo para a proporção, **devemos verificar se a distribuição de amostragem de $\hat{p}$ pode ser aproximada pela distribuição Normal**. Isso ocorrerá se forem **satisfeitas** as condições:

I. $n.\hat{p} \geq 5$ e

II. $n.\hat{q} \geq 5$.

Se essas duas condições ocorrerem, podemos construir o intervalo de confiança para a proporção, que utilizará, para a determinação do valor crítico, a tabela da Normal:

Populações infinitas:

$$IC = \hat{p} \pm z_c . \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Populações finitas:

$$IC = \hat{p} \pm z_c . \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Lembre–se: uma população é considerada **finita** quando $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

Importante: quando não possuímos uma estimativa prévia do valor de $\hat{p}$, utilizamos uma **abordagem conservativa** para o cálculo do intervalo de confiança, baseada no fato de que a expressão p(1–p) possui valor máximo igual a ¼ quando $0 \leq p \leq 1$. Você pode verificar isso construindo o gráfico da função p(1–p) e achando o seu valor máximo no intervalo [0;1]. Neste caso, a **margem de erro** é:

$$E = z_c . \sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 7

Pretende–se estimar a proporção de cura, através do uso de um certo medicamento em doentes contaminados com cercaria, que é uma das formas do verme da esquistossomose. Um experimento consistiu em aplicar o medicamento em 200 pacientes, escolhidos ao acaso, e observar que 160 deles foram curados. O que podemos dizer da proporção da população em geral para um nível de confiança de 95%?

Inicialmente, vamos calcular a proporção amostral:

$\hat{p} = \frac{160}{200} = 0{,}8.$

Utilizando a tabela da Normal, obtemos o valor crítico para 95% de confiança: z_c=1,96.

Aplicando a fórmula:

$$IC = \hat{p} \pm z_c . \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}8 \pm 1{,}96 . \sqrt{\frac{0{,}8.(1-0{,}8)}{200}} = 0{,}8 \pm 0{,}055.$$

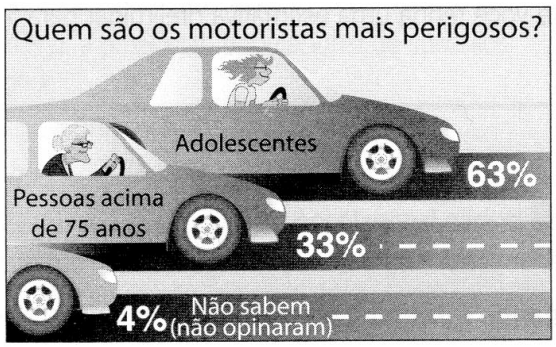
Logo, o intervalo de confiança é: **IC = [0,745 ; 0,855]**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 8

O gráfico a seguir foi feito com base em uma pesquisa entre 900 norte–americanos adultos. Construa um intervalo de 99% de confiança para a população de adultos que acham que os adolescentes são os motoristas mais perigosos.



A partir do gráfico temos que $\hat{p} = 0{,}63$. Na tabela da Normal, devemos buscar uma probabilidade compreendida entre 0 e z_c igual a 0,495. Perceba que esse valor não existe na tabela, porém, ele é o ponto médio dos valores 0,4949 correspondendo a z_c=2,57 e 0,4951 correspondendo a z_c=2,58. Pelo fato de essa probabilidade ser o ponto médio das probabilidades encontradas, trabalharemos, para uma melhor aproximação, com o ponto médio dos valores críticos d tabela, ou seja: $z_c = \frac{2{,}57+2{,}58}{2} = 2{,}575$. Então:

$$IC = \hat{p} \pm z_c . \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}63 \pm 2{,}575 . \sqrt{\frac{0{,}63.(1-0{,}63)}{900}} = 0{,}63 \pm 0{,}041.$$

O intervalo de confiança é: **IC=[0,589 ; 0,671]**.

Interpretação: com 99% de confiança, a proporção de adultos que acham que os adolescentes são os motoristas mais perigosos está entre 58,9% e 67,1%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 9

Você está analisando uma campanha política e quer estimar, com 95% de confiança, a proporção dos eleitores que irão votar em um determinado candidato. Sua estimativa deve ter uma margem de erro de 3% da população real. Encontre o número mínimo da amostra necessária se:

a) não há nenhuma estimativa prévia;

b) há uma estimativa prévia de $\hat{p} = 0{,}31$;

c) compare os resultados obtidos.

Resolução

a) Não havendo nenhuma estimativa de $\hat{p}$, trabalharemos com a abordagem mais conservadora:

$$E = z_c.\sqrt{\frac{1}{4n}} \Rightarrow 0{,}03 = 1{,}96.\sqrt{\frac{1}{4n}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4n}} = \frac{0{,}03}{1{,}96} \Rightarrow \frac{1}{4n} = \left(\frac{0{,}03}{1{,}96}\right)^2 \Rightarrow 4n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \Rightarrow n \cong 1067{,}1$$

Logo, temos que o tamanho mínimo da amostra é de **1068 eleitores**.

b) Como temos a estimativa $\hat{p} = 0{,}31$, fazemos:

$$E = z_c.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow 0{,}03 = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}31.(1-0{,}31)}{n}} \Rightarrow \sqrt{\frac{0{,}2139}{n}} = \frac{0{,}03}{1{,}96} \Rightarrow \frac{0{,}2139}{n} = \left(\frac{0{,}03}{1{,}96}\right)^2 \Rightarrow\Rightarrow n \cong 913{,}02.$$

Portanto, o tamanho mínimo da amostra, neste caso, é de **914 eleitores**.

c) Sem nenhuma estimativa prévia, o tamanho mínimo da amostra é de 1068 eleitores. Havendo a estimativa prévia, o tamanho da amostra necessária passa a ser de 914 eleitores. Isso ocorre por que na falta de uma estimativa prévia, maximizamos o valor de p(1–p), fazendo com que o tamanho da amostra aumente.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

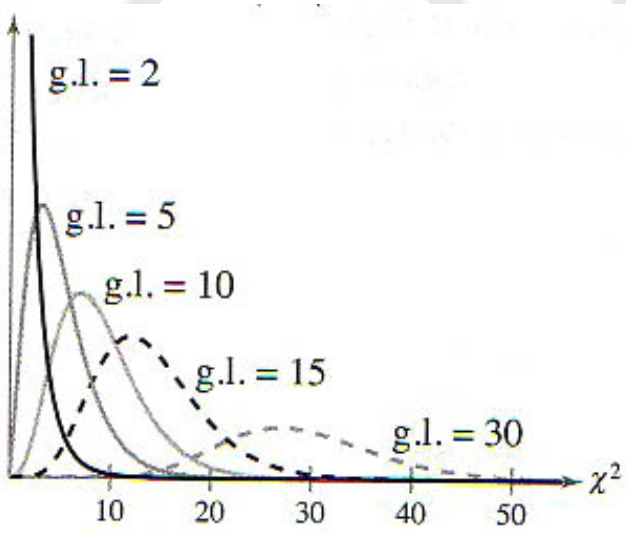
6. Intervalo de Confiança para a Variância e Desvio Padrão

Para construirmos intervalos para a variância e desvio padrão, devemos lembrar que a estimativa pontual para σ^2 é s^2 e que a estimativa pontual para σ é s. Além disso, devemos trabalhar com uma outra distribuição que não a Normal nem a t-Student: usamos a qui-quadrado.

6.1. A distribuição qui-quadrado

A distribuição qui-quadrado (representa-se por χ^2) é uma família de curvas, cada uma determinada pelos graus de liberdade. Para formar um intervalo de confiança para σ^2, usa-se a distribuição χ^2 com graus de liberdade iguais a um a menos do que o tamanho da amostra, ou seja, **g.l. = n – 1** .

Além disso, a área abaixo da curva da distribuição χ^2 é igual a 1 e as distribuições qui-quadrado são assimétricas positivas. A distribuição qui-quadrado é utilizada quando estamos analisando a variância de uma amostra quando essa amostra é proveniente de uma população normalmente distribuída.



Distribuições qui-quadrado

6.2. A tabela da distribuição qui-quadrado

Para a construção de intervalos de confiança para a variância e o desvio padrão, devemos obter dois valores na tabela da qui-quadrado, que chamaremos de χ^2_{inf} e χ^2_{sup}. Note que a tabela nos fornece a **área à direita** do valor observado.

Distribuição Qui-Quadrado - Unicaudal à Direita

Graus de Liberdade	p ▶	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
	2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
	3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
	4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
	5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
	6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
	7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
	8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
	9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
	10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
	11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
	12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
	13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
	14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
	15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
	16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
	17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
	18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
	19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
	20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
	21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
	22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
	23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
	24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
	25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
	26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
	27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
	28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
	29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
	30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
	31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
	32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
	33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648
	34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
	35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
	36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
	37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,893	62,883
	38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181
	39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
	40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
	45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
	50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
	55	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749
	60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
	70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
	80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
	90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
	100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169
	110	75,550	78,458	82,867	86,792	91,471	129,385	135,480	140,917	147,414	151,948
	120	83,852	86,923	91,573	95,705	100,624	140,233	146,567	152,211	158,950	163,648
	130	92,222	95,451	100,331	104,662	109,811	151,045	157,610	163,453	170,423	175,278

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 10

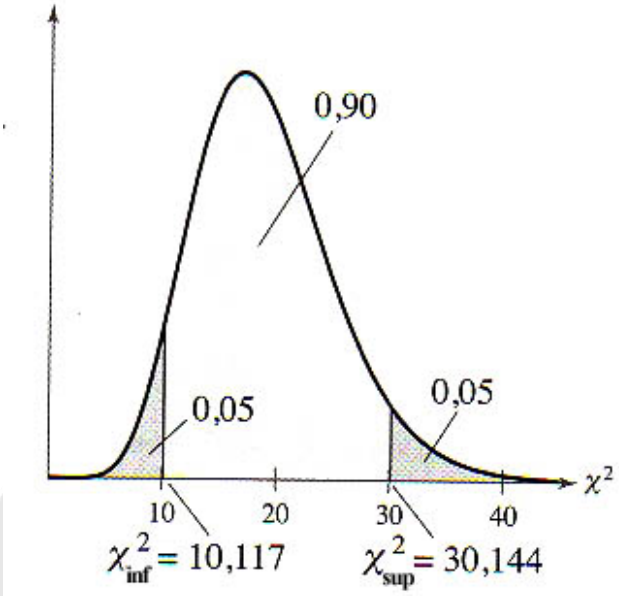
Vamos encontrar os valores críticos χ^2_{inf} e χ^2_{sup} para um intervalo de confiança de 90%, quando o tamanho da amostra for igual a 20.

Resolução

Os graus de liberdade são: **g.l.** = n – 1 = 20 – 1 **= 19**.

Para um intervalo de 90%, teremos uma área de 5% à esquerda de χ^2_{inf} e de 5% à direita de χ^2_{sup}. Mas, para utilizarmos a tabela, devemos pensar em **valores à direita** e, portanto, temos de 95% à direita de χ^2_{inf} e 5% à direita de χ^2_{sup}, conforme ilustra a figura:

p ▶	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,0
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,3
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,1
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,8
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,4
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,0
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,5
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,0
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,4
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,9
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,3
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,7
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,1
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,4
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,8
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,1
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,5
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,8
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,1



Assim, os valores procurados são: χ^2_{inf}=10,117 e χ^2_{sup}=30,144.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

6.3. Intervalo de confiança para a Variância

$$IC = \left[\frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{sup}} ; \frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{inf}}\right]$$

6.4. Intervalo de confiança para o Desvio Padrão

$$IC = \left[\sqrt{\frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{sup}}} ; \sqrt{\frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{inf}}}\right]$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 11

Um farmacêutico seleciona aleatoriamente 30 amostras de um antialérgico e as pesa. O desvio padrão da amostra é 1,20 miligramas. Supondo que os pesos são normalmente distribuídos, construa um intervalo de confiança de 99% para a variância e o desvio padrão da população.

Resolução

Devemos considerar uma área à direita de χ^2_{inf} igual a 0,995 e uma área à direita de χ^2_{sup} igual a 0,005. Para g.l. = n – 1 = 30 – 1 = 29, os valores críticos obtidos na tabela são: χ^2_{inf} = 13,121 e χ^2_{sup} = 52,336.

O intervalo para a variância é:

$$IC = \left[\frac{(30-1).(1{,}20)^2}{52{,}336}; \frac{(30-1).(1{,}20)^2}{13{,}121}\right] = [0{,}80; 3{,}18].$$

O intervalo para o desvio padrão é:

$$IC = \left[\sqrt{\frac{(30-1).(1{,}20)^2}{52{,}336}}; \sqrt{\frac{(30-1).(1{,}20)^2}{13{,}121}}\right] = [0{,}89; 1{,}78].$$

Assim, podemos dizer com 99% de confiança que a variância populacional está entre 0,80 e 3,18 miligramas^2, enquanto que o desvio padrão fica entre 0,89 e 1,78 miligramas.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

7. Exercícios

1) Em um teste com um tipo de fusível, 9 peças foram analisadas. O tempo médio até queimar dessa amostra foi 19,2 minutos, com desvio-padrão populacional conhecido 2,4 minutos. Sabe-se que a população é Normal ou Gaussiana. Calcule o intervalo de confiança de 95% para a verdadeira média da população.

2) Os pulsos em repouso de 920 pessoas sadias foram tomados, e uma média de 72,9 batidas por minuto (bpm) e uma variância de 121,0 bpm^2 foram obtidos. Construa um intervalo de confiança de 96% para a pulsação média em repouso de pessoas sadias com base nesses dados.

3) Os QIs de 181 meninos com idades entre 6-7 anos de Curitiba foram medidos. O QI médio foi 108,08, e o desvio padrão foi 14,38.

a) Calcule um intervalo de confiança de 95% para o QI médio populacional dos meninos entre 6-7 anos de idade em Curitiba usando estes dados.
b) Interprete o intervalo de confiança com palavras.

4) Seleciona-se uma amostra de 200 pixels da região A de uma imagem, chegando-se a uma média e variância amostrais de 187,3 e 53,1 respectivamente. Construa o intervalo de confiança de 97% para a média populacional.

5) O consumo de combustível é uma variável aleatória com parâmetros dependendo do tipo de veículo. Suponha que para um certo automóvel A, o desvio padrão do consumo seja 2 km/l, enquanto que para um automóvel B, o desvio padrão é de 3 km/l. A partir de uma amostra de 40 veículos do tipo A e 36 veículos do tipo B, verificamos que o consumo médio de cada veículo foi de 9,3 km/l para o tipo A e de 11,2 km/l para o B. Ao nível de 95% pode-se afirmar que o veículo B é mais econômico?

6) Num grupo de pacientes, o nível de colesterol é uma variável aleatória com distribuição Normal com variância 64 $(mg/ml)^2$. Para uma amostra de 46 indivíduos que forneceu nível médio de colesterol de 120 mg/ml, construa o intervalo de confiança de 88%.

7) Da experiência passada, sabe-se que o desvio padrão da altura de crianças da 5ª série é 5 cm. Colhendo uma amostra de 36 dessas crianças, observou-se a média de 150cm. Qual o intervalo de confiança de 95% para a média populacional? Interprete.

8) Um pesquisador está estudando a resistência de um determinado material sob determinadas condições. Ele sabe que essa variável é normalmente distribuída com desvio padrão de 2 unidades. Utilizando os valores 4,9 ; 7,0 ; 8,1 ; 4,5 ; 5,6 ; 6,8 ; 7,2 ; 5,7 ; 6,2 unidades, obtidos de uma amostra de tamanho 9, determine o intervalo de confiança para a resistência média com uma confiança de 90%.

9) Em uma empresa de vendas, as comissões de uma amostra de 130 vendedores são apresentadas na tabela a seguir:

Comissões (R$)	f_i
300 ├ 500	10
500 ├ 700	30
700 ├ 900	50
900 ├ 1100	40

Construa um intervalo de confiança de 95% para o verdadeiro salário médio dos vendedores dessa empresa.

10) Foram retiradas 25 peças da produção diária de uma máquina, encontrando–se para uma determinada medida uma média de 5,2 mm. Sabendo que as medidas tem distribuição Normal com desvio padrão populacional de 1,2 mm, construir intervalos de confiança para a média aos níveis de 90%, 95% e 99%.

11) A partir de uma amostra de 10 indivíduos, mediu–se o tempo que demoravam para a execução de certa tarefa. Essa amostra nos revelou que o tempo médio gasto foi de 110 segundos com desvio padrão de 10 segundos. Construa um intervalo com 95% de confiança para a média populacional. Qual hipótese devemos admitir quanto à distribuição de probabilidade da população?

12) Em quatro leituras experimentais de um comercial de 30 segundos, um locutor levou em média 29,2 segundos com uma variância de 5,76 segundos ao quadrado. Construa um intervalo de confiança para o tempo médio com 95% de confiabilidade.

13) Determine o tamanho mínimo da amostra necessário para se estar 95% confiante de que a média amostral esteja a uma unidade da média populacional dado que o desvio padrão populacional é 4,8. Assuma que a população é normalmente distribuída.

14) Uma amostra aleatória de 400 domicílios mostra–nos que 25% deles são casas de aluguel. Construa um intervalo de confiança para a proporção de casas de aluguel com um nível de confiança de 98%.

15) Em 50 lances de uma moeda, foram obtidas 30 caras. Com base em um intervalo de confiança de 96%, pode–se dizer que a moeda é honesta?

16) Para verificar se um dado era viciado, jogou–se o mesmo 120 vezes, obtendo–se 25 vezes o número cinco. Determinar um intervalo de confiança de 99% para a proporção de números cinco. Pode–se dizer que o dado é viciado?

17) Suponha que as alturas dos alunos de uma faculdade tenham distribuição normal com desvio padrão de 15 cm. Foi retirada uma amostra aleatória de 100 alunos, obtendo–se uma média de 175 cm. Construir, ao nível de 95%, o intervalo para a verdadeira altura média dos alunos.

18) Uma máquina corta plástico em folhas que tem 50 pés de comprimento (600 polegadas). Assuma que a população dos comprimentos é normalmente distribuída.

a) A empresa quer estimar o comprimento médio que a máquina está cortando dentro de 0,125 polegada. Determine o tamanho mínimo da amostra necessário para construir um intervalo de confiança de 95% para a média populacional. Assuma o desvio padrão da população como sendo 0,25 polegada.
b) Repita o item anterior usando uma tolerância de erro de 0,0625 polegada.
c) Compare os itens **a** e **b**.

19) Uma amostra aleatória de 200 habitantes de uma cidade mostrou que 180 desejavam água fluorada. Encontrar os limites de confiança de 90% para a proporção da população favorável à fluoração.

20) Uma amostra de 25 observações de uma Normal (μ,16) foi coletada e forneceu uma média amostral de 8. Construa um intervalo com confiança 90% e 95% para a média populacional. Comente as diferenças encontradas.

21) Construa um intervalo de confiança para a média, ao nível de 95%, admitindo a seguinte distribuição amostral, oriunda de uma população normalmente distribuída:

Classes	0 |– 5	5 |– 10	10 |– 15	15 |– 20
f_i	2	3	5	2

22) Suponha que a variável escolhida em um estudo seja o peso de certa peça e que a população seja infinita. Pelas especificações do produto, o desvio padrão é de 10kg. Logo, admitindo um nível de confiança de 95% e um erro amostral de 1,5kg, determine o tamanho da amostra necessária.

23) Será coletada uma amostra de uma população Normal com desvio padrão igual a 9. Para uma confiança de 90%, determine a amplitude do intervalo de confiança para a média populacional nos casos em que o tamanho da amostra é 30, 50 ou 100. Comente as diferenças.

24) Suponha que uma amostra aleatória de 10 observações aponte s^2=2,25. Quais os limites de confiança, a 80%, para a verdadeira variância? Qual foi a hipótese admitida para a distribuição de probabilidade da população?

25) Supondo uma população Normal, obteve-se a seguinte amostra:

44,9 – 44,1 – 43 – 42,9 – 43,2 – 44,5. Construa um intervalo de confiança, ao nível de 90%:

a) para a média;
b) para a variância.

26) O tempo de espera, em minutos, na fila de um banco segue uma distribuição Normal. Uma amostra de 22 pessoas foi obtida aleatoriamente e verificou-se que o desvio padrão dessa amostra foi de 3,6 minutos. Construa um intervalo de confiança para a variância e para o desvio padrão ao nível de 98% de confiança.

27) Um fabricante de máquinas para cortar grama está tentando determinar o desvio padrão da vida de um de seus modelos de máquinas. Para fazê-lo, ele seleciona aleatoriamente 12 máquinas que foram vendidas anos atrás e descobre que o desvio padrão da amostra é 3,25 anos. Construa um intervalo de confiança para o desvio padrão ao nível de 99% de confiança.

Respostas

1) IC = [17,6 ; 20,8]
2) IC = [72,2 ; 73,6]
3) a) IC = [105,99 ; 110,17]
b) Com uma confiança de 95%, a verdadeira média de QIs populacional de meninos entre 6 e 7 anos de idade que residem em Curitiba encontra-se no intervalo [105,99 ; 110,17], ou ainda, se fossem retiradas 100 amostras de meninos e calculadas as médias de seus QIs, em 95 delas a média estaria dentro do intervalo apresentado.
4) IC = [186,2 ; 188,4]
5) Como IC_A = [8,7 ; 9,9] e IC_B = [10,2 ; 12,2], ou seja, não há uma intersecção entre os dois intervalos; ao nível de 95% podemos afirmar que o automóvel B é mais econômico que o A (empate técnico).
6) IC = [118,2 ; 121,8]
7) IC = [148,4 ; 151,6]. Esse IC indica que com 95% de confiança a verdadeira média das alturas de crianças de 5ª série está compreendida entre 148,4 cm e 151,6 cm. De outra maneira, podemos dizer que se fossem retiradas 100 amostras de tamanho 36 dessas crianças e calculadas as respectivas médias, em 95 amostras a média estaria dentro do intervalo [148,4 ; 151,6].
8) IC = [5,12 ; 7,32]
9) $\bar{x} = 784{,}62$ e s = 184,04
IC = [752,98 ; 816,26]
10) Para 90%: IC = [4,8 ; 5,6]. Para 95%: IC = [4,7 ; 5,7]. Para 99%: IC = [4,6 ; 5,8].
11) IC=[102,85 ; 117,15]. Deve–se admitir a hipótese de que a distribuição de probabilidade da população seja Normal.
12) IC=[25,38 ; 33,02].
13) 89
14) IC=[20% ; 30%]
15) IC=[0,46 ; 0,74]. Logo, ao nível de 96%, pode–se dizer que a moeda é honesta, pois o IC contém a proporção de 50% de caras.
16) Não se pode dizer, ao nível de 99%, que o dado seja viciado, pois o intervalo de confiança para a proporção de números cinco contém p=1/6=0,167, sendo IC=[0,113 ; 0,303].
17) IC=[172,06cm ; 177,94cm].
18) a) 16 folhas.
b) 62 folhas.
c) E=0,0625 requer um tamanho de amostra maior. Conforme o tamanho do erro decresce, uma amostra maior tem que ser retirada para obter informação suficiente a partir da população para assegurar a correção desejada.
19) IC=[0,865; 0,935].
20) Para 90%: IC=[6,684 ; 9,316]. Para 95%: IC=[6,432 ; 9,568]. Quanto maior for a confiança, maior será o tamanho do intervalo.
21) IC=[7,26 ; 13,58].
22) 171 peças.
23) Com n=30, a amplitude é 5,40; para n=50 é 4,19 e para n=100 a amplitude é 2,96; quanto maior for o **n**, menor será a amplitude. Nos cálculos, usou–se $\mathbf{z_c=1{,}645}$.
24) IC=[1,38 ; 4,86]. Admite-se que a distribuição de probabilidade da população seja Normal.
25) média = 43,77; desvio padrão amostral = 0,85; graus de liberdade = 5
a) [43,07 ; 44,47]
b) [0,32 ; 3,14]
26) Variância: IC=[6,96 ; 30,59]. Desvio padrão: IC=[2,64 ; 5,53].
27) IC=[2,08 ; 6,68].

Tabelas

Distribuição Normal: Valores de p tais que $P(0 \leq Z \leq z) = p$

Parte inteira e primeira decimal de z	Segunda casa decimal de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Distribuição t-Student: valores **tc** tais que P(-**tc** ≤ t ≤ **tc**) = 1 - p

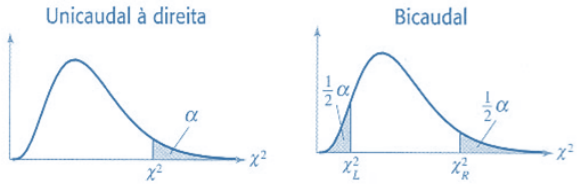
Graus de Liberdade	p ►	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	8%	6%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%
	1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	318,309	636,619
	2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,599
	3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	10,215	12,924
	4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	7,173	8,610
	5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	5,893	6,869
	6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959
	7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408
	8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041
	9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781
	10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587
	11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437
	12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318
	13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221
	14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140
	15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,733	4,073
	16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015
	17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965
	18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922
	19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883
	20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850
	21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819
	22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792
	23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768
	24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745
	25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,450	3,725
	26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707
	27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690
	28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674
	29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659
	30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646
	31	0,127	0,256	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,375	3,633
	32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,365	3,622
	33	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,053	1,308	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,356	3,611
	34	0,127	0,255	0,389	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,348	3,601
	35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591
	36	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	1,802	1,942	2,028	2,131	2,434	2,719	3,333	3,582
	37	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,305	1,687	1,800	1,940	2,026	2,129	2,431	2,715	3,326	3,574
	38	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	1,799	1,939	2,024	2,127	2,429	2,712	3,319	3,566
	39	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,304	1,685	1,798	1,937	2,023	2,125	2,426	2,708	3,313	3,558
	40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	1,796	1,936	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551
	45	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,301	1,679	1,791	1,929	2,014	2,115	2,412	2,690	3,281	3,520
	50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	1,787	1,924	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496
	55	0,126	0,255	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,297	1,673	1,784	1,920	2,004	2,104	2,396	2,668	3,245	3,476
	60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	1,781	1,917	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460
	70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,776	1,912	1,994	2,093	2,381	2,648	3,211	3,435
	80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,773	1,908	1,990	2,088	2,374	2,639	3,195	3,416
	90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,771	1,905	1,987	2,084	2,368	2,632	3,183	3,402
	100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,769	1,902	1,984	2,081	2,364	2,626	3,174	3,390
	110	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,659	1,767	1,900	1,982	2,078	2,361	2,621	3,166	3,381
	120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,766	1,899	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373
	∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291

Professor Guru

professorguru.com.br

Distribuição Qui-Quadrado - Unicaudal à Direita

Graus de Liberdade p ►	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,893	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
55	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169
110	75,550	78,458	82,867	86,792	91,471	129,385	135,480	140,917	147,414	151,948
120	83,852	86,923	91,573	95,705	100,624	140,233	146,567	152,211	158,950	163,648
130	92,222	95,451	100,331	104,662	109,811	151,045	157,610	163,453	170,423	175,278



Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru