Introdução à Probabilidade

Conscientemente ou inconscientemente, a probabilidade é usada por todos nós na hora de tomar decisões em situações de incerteza. Conhecendo ou não as regras para o seu cálculo, muitas pessoas se interessam por eventos ligados às probabilidades. Do contrário, como poderíamos explicar o grande número de indivíduos que jogam em loterias, bingos, corridas de cavalos, etc.? A utilização das probabilidades indica a existência ou não de um elemento de acaso (incerteza) quanto à ocorrência ou não de um evento. Por exemplo, se lançarmos uma moeda, não podemos afirmar se vamos obter cara ou coroa. A probabilidade indicará uma medida de quão provável é a ocorrência de determinado evento.

São várias as situações em que é desejável ter uma medida (avaliação numérica) de quão provável é a ocorrência de determinado evento futuro: lançamento de um produto, bons lucros em uma operação financeira, chover amanhã de manhã, meu time ganhar o próximo jogo, etc.

1. Um breve histórico

A resolução de problemas vinculados a jogos de azar esteve na origem da teoria das probabilidades, que deu seus primeiros passos no século XVI. Os jogadores da época recorriam a matemáticos como Tartaglia e Cardano, solicitando-lhes informações que os favorecessem nos jogos de dados e de baralho.

Foi no século XVII, porém, que a teoria das probabilidades veio adquirir sua forma atual. Os responsáveis por isso foram três franceses: o Cavaleiro de Méré – nobre e jogador inveterado – e Blaise Pascal e Pierre de Fermat, dois matemáticos, que, embora amadores, deram contribuições muito importantes para a Matemática.

Em 1652, o Cavaleiro de Méré propôs a Pascal alguns problemas ligados aos jogos de azar, um dos quais era este: num jogo de azar equilibrado, duas pessoas apostaram 32 moedas de ouro cada uma. Combinou-se que ganharia quem primeiro vencesse 3 partidas; no entanto, o jogo precisou ser interrompido quando uma pessoa tinha vencido 2 partidas e a outra, 1 partida. De que forma devem ser repartidas as 64 moedas de ouro?

Blaise Pascal refletiu nesse problema durante dois anos e, em 1654, passou-o para o jurista Pierre de Fermat. Seguiu-se então uma correspondência entre Pascal e Fermat, que veio constituir-se no ponto de partida da atual teoria das probabilidades.

Pascal e Fermat começaram por concordar que, num jogo interrompido, as moedas deveriam divididas de acordo com as perspectivas de vitórias de cada jogador.

Pascal resolveu o problema analisando o que poderia ocorrer na 4ª partida, para a qual havia 2 possibilidades:

- vence a 1ª pessoa, que assim ganha o jogo e as 64 moedas;
- vence a 2ª pessoa, que desse modo fica em igualdade de condições com a 1ª. Nesse caso, a decisão ocorreria somente na 5ª partida.

Observemos que, se não houver a 5ª partida, ou a 1ª é a vencedora (e ganha as 64 moedas), ou ambas ficam em igualdades de condições (aí, é justo que cada uma delas fique com 32 moedas). Portanto, ao fim da 4ª partida, a 1ª pessoa já tem garantido 32 moedas, e as 32 restantes têm a mesma possibilidade de ir para uma ou para outra (que essas 32 moedas sejam então divididas em partes iguais pelos dois jogadores).

Com base nesse raciocínio, Pascal conclui que a 1ª pessoa tinha direito a 48 (32 + 16) moedas, e à 2ª cabiam 16 moedas.

Notemos que Pascal resolveu o problema subdividindo-o em casos mais simples, para os quais fossem muito mais óbvias as possibilidades de ocorrer um ou outro fato; em seguida "agrupou" esses casos para chegar à resposta desejada.

Fonte: TROTTA, F. *Matemática por assunto 4.* s.e. São Paulo: Scipione, 1988.

2. Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos

Entendemos por experimento aleatório os fenômenos que, quando repetidos inúmeras vezes em processos semelhantes, possuem resultados imprevisíveis. O lançamento de um dado e de uma moeda são considerados exemplos de experimentos aleatórios. No caso dos dados podemos ter seis resultados diferentes {1, 2, 3, 4, 5, 6} e no lançamento da moeda, dois {cara, coroa}.

Do mesmo modo, se considerarmos uma urna com 50 bolas numeradas de 1 a 50, ao retirarmos uma bola não saberemos dizer qual o número sorteado. Essas situações envolvem resultados impossíveis de prever. Podemos relacionar esse tipo de experimento com situações cotidianas, por exemplo, não há como prever a vida útil de todos os aparelhos eletrônicos de um lote, pois isso dependerá das condições de uso impostas pelas pessoas que adquirirem o produto. Outro exemplo que demonstra a característica de um experimento aleatório são as previsões do tempo.

Os experimentos aleatórios produzem possíveis resultados que são denominados espaços amostrais. O espaço amostral possui subconjuntos denominados eventos. Como já citado anteriormente, temos que o número possível de elementos no lançamento de um dado é o seu espaço amostral, que geralmente é representado pela letra grega maiúscula ômega (Ω). Ou seja, neste caso temos:

Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Chamamos de evento a qualquer subconjunto de um espaço amostral. Geralmente os eventos são representados por letras maiúsculas. Podemos definir um evento A da seguinte maneira:

A: sair um número par no lançamento de um dado.

Neste caso, A={2,4,6},

e os subconjuntos, os possíveis eventos são {(1), (2), (3), (4), (5), (6)}. No caso da moeda, o espaço amostral são os dois possíveis resultados {cara e coroa} e os eventos são {(cara), (coroa)}.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 1

Uma moeda é lançada 2 vezes. Seja o evento A: sair faces diferentes. Escreva o conjunto que representa o espaço amostral e o evento A.

Vamos definir K como sendo sair cara e C sair coroa. Temos:

Ω ={(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)} e

A={(K,C), (C,K)}.

Perceba que as letras K e C foram colocadas entre parênteses, como se fosse um par ordenado de um plano cartesiano. Isso deve ser feito porque (K,C) é diferente de (C,K). Nessa notação, (K,C) indica a ocorrência de cara no primeiro lançamento e coroa no segundo. Já (C,K) indica coroa no primeiro e cara no segundo.

Nota: se ao invés de lançarmos uma moeda duas vezes lançássemos duas moedas simultaneamente, os conjuntos Ω e A seriam exatamente os mesmos.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

3. Combinações de eventos

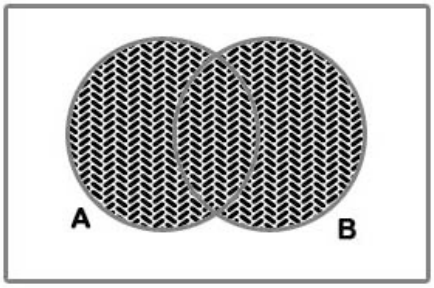
Neste capítulo estudaremos algumas situações em que podem ocorrer com os eventos: união, intersecção, eventos mutuamente exclusivos e eventos complementares.

3.1. União de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então A $\cup$ B corresponde a um evento que ocorrerá quando uma das três condições forem satisfeitas:

I. ocorre A e não ocorre B;
II. não ocorre A e ocorre B;
III. ocorre A e ocorre B simultaneamente.

Fique atento: na **língua portuguesa**, quando dizemos “A ou B” estamos pensando em ocorrências exclusivas, ou seja, em “ocorre A e não ocorre B” ou em “não ocorre A e ocorre B”. Por exemplo, se alguém lhe perguntar: “você prefere Guaraná ou Coca-Cola?”, espera-se que a sua resposta seja uma das duas bebidas. Não esperamos que você responda: “quero os dois”. Por isso que a palavra “ou” em português é dita **exclusiva**. Já pensando na **linguagem matemática**, **“ou” é sinônimo de “união”** e, neste caso, quaisquer uma das três respostas mencionadas é coerente. Por isso que “ou” em matemática é dito **inclusivo**. Graficamente, a região hachurada a seguir representa A $\cup$ B:

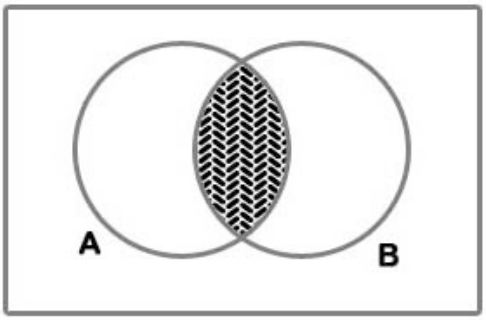


Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

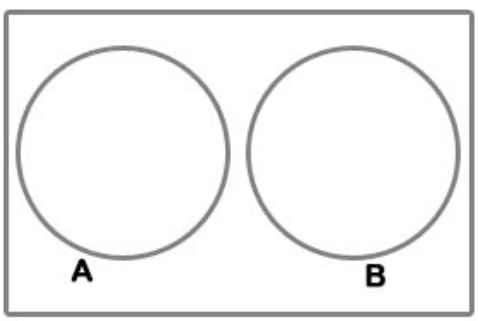
3.2. Interseção de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cap B$ será um evento que corresponde à ocorrência de **A e B simultaneamente**. Dessa forma, podemos perceber que o conjunto $A \cap B$ é um subconjunto de $A \cup B$:



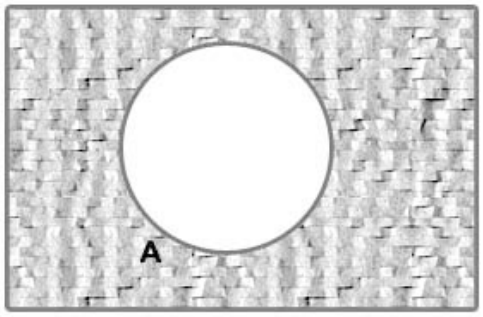
3.3. Eventos mutuamente exclusivos

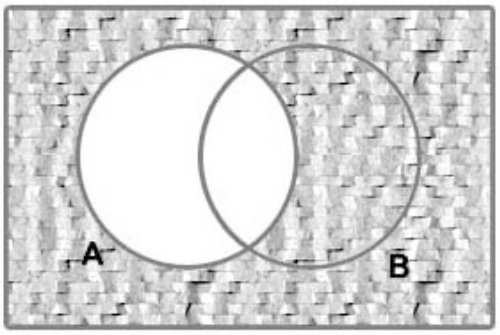
Se $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados mutuamente exclusivos.



3.4. Complementar de um evento

Seja A um evento; então $\overline{A}$ (lê-se: "A barra") será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. As figuras abaixo ilustram a situação do complementar em relação a A:





Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 2

Suponhamos o lançamento de um dado. Sejam os eventos:

A: ocorrer um número ímpar;

B: ocorrer um número primo.

Escrever os conjuntos que representam:

a) o espaço amostral;

Ω ={1,2,3,4,5,6}

b) o evento A;

A={1,3,5}

c) o evento B;

Lembre-se que um número primo é aquele que possui exatamente dois divisores: o 1 e ele mesmo. O número 1 possui apenas um divisor, que é o próprio 1. Logo, **o número 1 não é primo!**

B={2,3,5}

d) o evento ocorrer um número ímpar ou primo;

Esse evento corresponde à união de A com B: A ∪ B = {1,2,3,5}

e) o evento ocorrer um número ímpar e primo;

Esse evento corresponde à intersecção de A com B: A ∩ B = {3,5}

f) o evento não ocorrer um número ímpar;

É o mesmo que obter o conjunto complementar de A: $\overline{A}$ = {2,4,6}. Ou seja, podemos dizer que $\overline{A}$ é o evento "sair um número par".

g) o evento não ocorrer um número primo.

Corresponde ao complementar de B: $\overline{B}$ = {1,4,6}.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4. Probabilidade de um evento

Existem três tipos de probabilidades: probabilidade clássica, probabilidade empírica e probabilidade subjetiva. A probabilidade de que o evento E ocorrerá é escrita como P(E) e lê-se "probabilidade de um evento E".

4.1. Probabilidade clássica (ou teórica)

É utilizada quando cada resultado de um espaço amostral é igualmente possível de ocorrer. Ela é calculada pela fórmula:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos do conjunto E}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$$

A probabilidade de ocorrer um evento E é sempre um valor entre 0 e 1, ou seja, entre 0% e 100%:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Quando a probabilidade de um evento for 0, isso significa que não há possibilidades desse evento ocorrer. Por isso, dizemos que é um **evento impossível.** Em contrapartida, se a probabilidade for igual a 1, isto é, a 100%, isso indica que com certeza ocorrerá tal evento. Por isso dizemos que é um **evento certo**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 3

Lança-se um dado. Sejam os eventos:

A: obter número 5;

B: obter número 1 ou 6;

C: obter número 7;

D: obter um número de 1 a 6.

Calcular a probabilidade de ocorrer cada um dos eventos citados.

Inicialmente, vamos escrever o espaço amostral e os conjuntos que representam cada um dos eventos citados:

Ω ={1,2,3,4,5,6}

A={5}

B={1,6}

C=Ø (pois não existe o número 7 no dado)

D={1,2,3,4,5,6}

Utilizando a definição de probabilidade, temos:

$P(A) = \frac{1}{6} \cong 0{,}1667$ ou 16,67%

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333$ ou 33,33%

$P(C) = \frac{0}{6} = 0$, ou seja, o evento C é chamado de **evento impossível**.

$P(D) = \frac{6}{6} = 1$ ou 100%, ou seja, o evento D é chamado de **evento certo**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4.2. Probabilidade empírica (ou estatística)

Quando um experimento (por exemplo, lançar um dado ou lançar uma moeda) é repetido muitas vezes, são formados padrões regulares que permitem encontrar a probabilidade empírica de que determinado evento ocorra.

Por exemplo: ao lançarmos uma moeda 10 vezes, pode ser que ocorra obtermos 2 caras e 8 coroas. Porém, isso não significa que a probabilidade de ocorrer cara não seja 50%. Se repetirmos o experimento lançar uma moeda em torno de 10.000 vezes, é muito provável que o número de caras observadas seja um valor bastante próximo de 5.000.

Esse fato é explicado pela **Lei dos Grandes Números**: conforme um experimento é repetido várias vezes, a probabilidade empírica de um evento se aproxima da sua probabilidade teórica (real).

A probabilidade empírica de um evento E é a frequência relativa do evento E, ou seja:

$$P(E) = \frac{\textit{número de ocorrências do evento E}}{\text{número de ocorrências total}}$$

Exemplo 4

Em um Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, é perguntado sobre o grau de satisfação do cliente com os serviços prestados. Em 1000 atendimentos, 550 consumidores disseram estar “muito satisfeitos”; 300 apenas “satisfeitos”; e o restante, “insatisfeitos”. Qual a probabilidade de a empresa receber a ligação de um cliente “insatisfeito”?

Temos um total de 1000 – 550 – 300 = 150 clientes insatisfeitos. Seja o evento A definido por receber a ligação de um cliente insatisfeito. Assim:

$P(A) = \frac{150}{1000} = 0{,}15$ ou 15%.

Logo, a probabilidade de a empresa receber a ligação de um cliente “insatisfeito” é de 15%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4.3. Probabilidade subjetiva

As probabilidades subjetivas resultam da intuição, de suposições fundamentadas e de estimativas.

Por exemplo: um médico "acredita" que a chance de um paciente que possui ferimentos oriundos de um acidente de trânsito sobreviver é 80%. Note que se o mesmo paciente fosse avaliado por outro medido, essa probabilidade poderia ser de, por exemplo, 90%.

5. Probabilidade de um evento complementar

Sendo A um evento e $\overline{A}$ o evento complementar e o fato de a **soma das probabilidades de todos os eventos ser sempre igual a 1**, temos:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Ou ainda:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 5

A probabilidade de um equipamento sair de fábrica com defeito é de 0,5%. Qual a probabilidade de o equipamento sair funcionando corretamente?

Definindo D: um aparelho apresentar defeito de fábrica, temos que $\overline{D}$ é o evento um aparelho não apresentar defeito de fábrica, ou seja, sair funcionando corretamente.

Lembrando que 0,5% = 0,005, temos:

$P(D) + P(\overline{D}) = 1$
$0{,}005 + P(\overline{D}) = 1$
$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}005$
$P(\overline{D}) = 0{,}995$

Logo, a probabilidade é de 99,5%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 6

Segundo os meteorologistas, a probabilidade de fazer um dia ensolarado é 45%; ficar nublado é 30%. Qual a probabilidade de chover? Admita que essas são as únicas possibilidades de ocorrência.

Vamos definir os eventos:

S: o dia será ensolarado;

N: o dia ficará nublado;

C: haverá chuva no dia.

Como **a soma de todas as probabilidades é sempre igual a 1**, então:

P(S) + P(N) + P(C) = 1

0,45 + 0,30 + P(C) = 1

P(C) = 1 – 0,45 – 0,30

P(C) = 0,25.

Ou seja, a probabilidade de chover é de 25%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

6. Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B dois eventos tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Neste caso,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

É muito comum imaginarmos que a probabilidade de ocorrer A ou B (A U B) seja igual a soma das probabilidades de A com as probabilidades de B. Isso só é válido se estivermos trabalhando com eventos mutuamente exclusivos.

Se A e B são dois eventos tais que $A \cap B = \emptyset$ (ou seja, são **mutuamente exclusivos**) então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Em muitas situações, podemos utilizar as fórmulas acima para a resolução de um exercício ou calcular a probabilidade diretamente, utilizando a definição.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 7

Escolhendo-se aleatoriamente um número natural de 1 a 20, qual é a probabilidade desse número ser múltiplo de 2 ou 3?

Sejam os eventos:

A: o número ser múltiplo de 2;

B: o número ser múltiplo de 3.

Logo, concluímos que:

A U B: o número ser múltiplo de 2 ou 3;

A ∩ B: o número ser múltiplo de 2 e 3.

Os conjuntos são:

A = {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}

B = {3,6,9,12,15,18}

A ∩ B = {6,12,18}

As probabilidades são:

$P(A) = \frac{10}{20}$; $P(B) = \frac{6}{20}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$.

Logo,

$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$.

Observe que esse valor poderia ser obtido diretamente da definição de probabilidade escrevendo o conjunto:

A U B = {2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20},

que possui 13 elementos.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

7. Exercícios resolvidos de probabilidade

Exemplo 8

(FUVEST) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é de 95%. A probabilidade de ser 110 milhões ou menos é de 8%. Calcule a probabilidade de ser 110 milhões.

Vamos definir os eventos:

A: a população tem 110 milhões ou mais;

B: a população tem 110 milhões ou menos.

Logo, podemos concluir que o evento A ∩ B corresponde a população possuir exatamente 110 milhões. E, ainda, A U B corresponde a população ter 110 milhões ou menos ou mais. Portanto, A U B corresponde à todas as possibilidades de tamanho da população. Assim:

P (A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)

1 = 0,95 + 0,08 – P(A ∩ B)

P(A ∩ B) = 0,95 + 0,08 – 1

P(A ∩ B) = 0,03

Logo, a probabilidade de a população ter exatamente 110 milhões vale 3%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 9

Suponhamos o lançamento simultâneo de dois dados. Calcular a probabilidade dos seguintes eventos:

A: ocorrência de números cuja soma seja menor ou igual a 6.
B: ocorrência de números cuja soma seja 8.
C: ocorrência de números cuja soma seja diferente de 8.
D: ocorrência de números iguais nos dois dados ou de números com soma igual a 8.
E: ocorrência de números múltiplos de 3 em pelo menos um dos dados.

Podemos construir o espaço amostral:

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), 2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Perceba que nosso espaço amostral possui 36 elementos e que, portanto, poderá ser um pouco mais difícil trabalharmos com a observação direta desse conjunto. Assim, para situações de lançamentos de 2 dados, podemos recorrer a um método prático de resolução que é a construção de uma tabela. Note que as bordas da tabela representam os resultados dos dados e o centro dela corresponde à soma dos resultados:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Observe que na tabela temos os 36 possíveis resultados do lançamento de dois dados.

Para o cálculo de P(A), basta observamos, na tabela, os resultados cuja soma é menor ou igual a 6. São, ao todo, 15 resultados:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Logo, $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Com relação ao evento B, observamos facilmente que temos soma igual a 8 em 5 resultados. Portanto, $P(B) = \frac{5}{36}$.

O evento C é o complementar de B. Logo:

P(C) + P(B) = 1

P(C) = 1 – P(B)

$P(C) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$.

O evento D pede soma igual a 8 **ou** números iguais nos dois dados. Assim, em nossa tabela, vamos verificar quais são os resultados com soma 8 e aqueles em que os resultados são números idênticos nos dois dados (marcados com X):

	1	2	3	4	5	6
1	X					
2		X				8
3			X		8	
4				**8**		
5			8		X	
6		8				X

Note que o par (4,4) corresponde a intersecção dos dois eventos. Portanto:

$P(D) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Com relação ao evento E, apenas nos interessa os resultados dos dados em si, e não a soma dos resultados. Assim, podemos utilizar uma tabela similar para marcar os resultados que nos interessa. No caso, múltiplos de 3 nos dois dados:

	1	2	3	4	5	6
1			X			X
2			X			X
3	X	X	X	X	X	X
4			X			X
5			X			X
6	X	X	X	X	X	X

Ao todo, são 20 resultados de interesse. Logo, $P(E) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

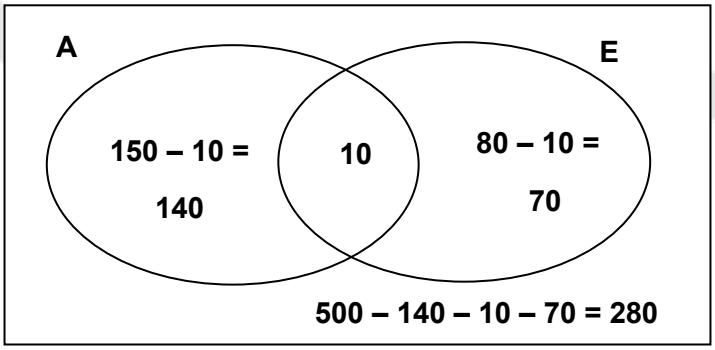
Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 10

Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Administração e 10 estudam Engenharia e Administração. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) ele estude Administração e Engenharia?
b) ele estude somente Engenharia?
c) ele estude somente Administração?
d) ele não estude Engenharia nem Administração?
e) ele estude Engenharia ou Administração?

Uma forma simples de resolver este tipo de exercício é trabalhar com conjuntos. Lembre-se que devemos iniciar sempre a partir da intersecção.



Agora, podemos responder às questões:

a) $P(A \cap E) = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$

b) $P(\text{apenas E}) = \frac{70}{500} = \frac{7}{50}$

c) $P(\text{apenas A}) = \frac{140}{500} = \frac{7}{25}$

d) $P(\text{não A e não E}) = \frac{280}{500} = \frac{14}{25}$

e) $P(A \cup E) = \frac{140+10+70}{500} = \frac{220}{500} = \frac{11}{25}$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

8. Espaços equiprováveis e não equiprováveis

Quando a probabilidade de ocorrência de cada elemento de um espaço amostral for a mesma, dizemos que temos um **espaço equiprovável**. Porém, se a probabilidade de ocorrência de cada elemento não for a mesma, dizemos que temos um **espaço não equiprovável**.

Exemplo 11

Uma urna contém 50 bolas idênticas. Se as bolas forem numeradas de 1 a 50, qual a probabilidade de, em uma extração ao acaso,

a) obtermos a bola de número 27?

Nosso espaço amostral é Ω ={ 1, 2, ..., 50} e é equiprovável. Ocorrer a bola 27 significa que o evento possui apenas 1 elemento. Logo:

$P(A) = \frac{1}{50}$.

b) obtermos uma bola de número par?

Perceba que existem, de 1 a 50, 25 bolas pares. Ou seja, nosso evento é composto por 25 elementos. Assim:

$P(B) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$.

c) obtermos uma bola de número maior que 20?

O evento aqui é C = { 21, 22, ..., 50}, composto por 30 elementos. Logo:

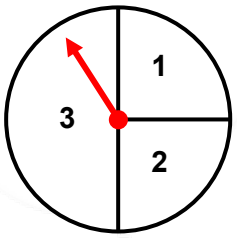
$P(C) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 12

Considere a roleta indicada na figura:



Calcule a probabilidade de ser sorteado cada um dos números mostrados.

Observe que o espaço amostral é Ω = {1, 2, 3}. Porém, é natural percebemos que a chance de ser sorteado o número 3 é maior que de sair o número 1 ou 2. Logo, se trata de um espaço não equiprovável.

Se dividirmos o círculo em 4 partes iguais, percebemos que o número 1 e o número 2 ocupam uma das quatro partes cada um. Já o número 3 ocupa duas das quatro partes. Dessa forma, é fácil concluir que:

$P(1) = \frac{1}{4}$; $P(2) = \frac{1}{4}$; $P(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Resumidamente, perceba que a probabilidade de ocorrer cada um dos números é diretamente proporcional à área desses números na roleta.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 13

A probabilidade de ocorrer cara no lançamento de uma moeda viciada é 0,62. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa?

Embora se trate de mais um caso de espaço não equiprovável, a resolução deste exemplo é praticamente intuitiva. Seja K o evento sair cara e C sair coroa. Então:

P(K) + P(C) = 1

P(C) = 1 – 0,62

P(C) = 0,38 ou 38%

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 14

Em uma moeda viciada, a probabilidade de ocorrer cara é igual a quatro vezes a probabilidade de ocorrer coroa. Calcule a probabilidade de ocorrer cara em um lançamento dessa moeda.

Usando as mesmas suposições do exemplo anterior temos também que:

P(K) = 4.P(C).

Como P(K) + P(C) = 1, substituindo a expressão anterior temos:

4.P(C) + P(C) = 1

5.P(C) = 1

$P(C) = \frac{1}{5}$.

Logo, $P(K) = \frac{4}{5}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 15

Três cavalos P, Q e R disputam um páreo, no qual só se premiará o vencedor. Um apostador afirma que a probabilidade de P vencer é o dobro da probabilidade de Q e que Q tem o triplo da probabilidade de ganhar de R. Qual a probabilidade que cada cavalo tem de vencer?

Pelo enunciado temos:

P(P) = 2.P(Q) (I)

P(Q) = 3.P(R) . (II)

Substituindo (II) em (I) temos:

P(P) = 2.3.P(R)

P(P) = 6.P(R). (III)

Sabemos que

P(P) + P(Q) + P(R) = 1. (IV)

Substituindo (II) e (III) em (IV) obtemos:

6.P(R) + 3.P(R) + P(R) = 1

10.P(R) = 1

$P(R) = \frac{1}{10}$.

Substituindo o resultado em (II) e (III) obtemos:

$P(Q) = \frac{3}{10}$ e $P(P) = \frac{6}{10}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 16

Em um lançamento de um dado viciado, a probabilidade de observarmos um número é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de ocorrer número maior ou igual a 5.

Seja k um número real. A probabilidade de ocorrer uma face é proporcional ao valor dessa face. Então, temos a tabela:

face	probabilidade
1	k
2	2k
3	3k
4	4k
5	5k
6	6k
soma	21k

k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1

21k = 1

$k = \frac{1}{21}$.

As probabilidades de ocorrer face 5 e 6 são, respectivamente, $\frac{5}{21}$ e $\frac{6}{21}$. Portanto,

P(face maior ou igual a 5) = $\frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

9. Independência de dois eventos

Dois eventos são estatisticamente independentes se a ocorrência de um deles não afetar a ocorrência do outro. Por exemplo: ao lançarmos uma moeda honesta e observarmos o resultado, podemos ter obtido uma cara. Se lançarmos novamente, a probabilidade de obtermos outra cara não será alterada em função do resultado obtido na(s) jogada(s) anterior(es), ou seja, a probabilidade continua sendo 50%.

Dessa maneira, se A e B são eventos independentes então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Essa regra é válida para n eventos independentes A_1, A_2, ..., A_n. Isto é válido desde que todas as combinações entre dois ou mais eventos sejam independentes:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$$

Caso A e B **não** sejam eventos independentes, dizemos que A e B são **dependentes**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 17

Uma experiência consiste em lançar, simultaneamente, um dado e duas moedas. Qual a probabilidade de obter a face quatro no dado e duas caras?

Como os eventos são, claramente, independentes, visto que o resultado obtido nas moedas e no dado não são influenciados um pelo outro, temos:

$P(K \cap K \cap 4) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

9.1. Método da árvore de probabilidades

Exemplo 18

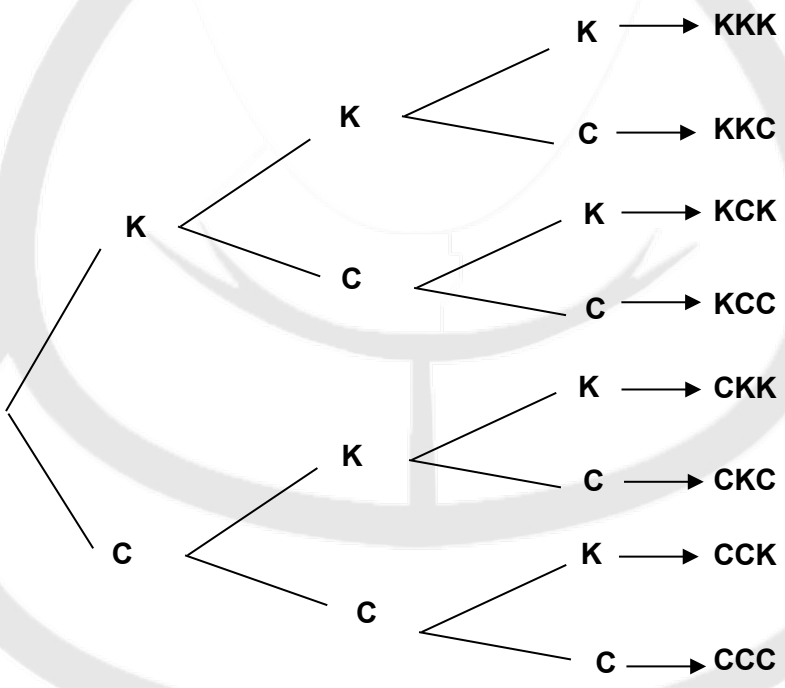
Lança-se uma moeda 3 vezes. Calcule a probabilidade dos eventos:

A: ocorrem pelo menos duas caras.

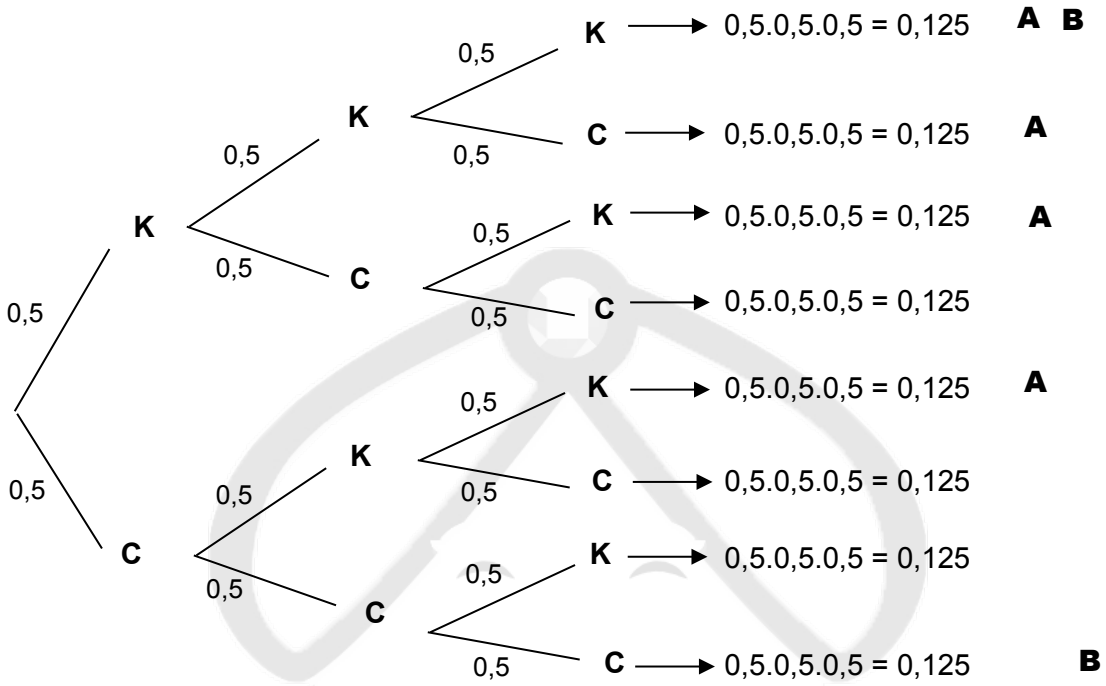
B: ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Novamente, estamos trabalhando com eventos independentes. Uma maneira de resolver este exercício, sem a necessidade de se escrever todas as possibilidades do espaço amostral, é trabalhar com o que chamamos de **árvore de possibilidades** ou **árvore de probabilidades**. A árvore deve partir de um ponto e "passar", até o final dela, por todas as possibilidades de resultados. Em seus galhos, anotamos as probabilidades de ocorrências. Ao final dela, multiplicamos os resultados de cada galho para sabermos a probabilidade de um evento em específico.

Inicialmente, vamos montar apenas as possibilidades. Perceba que, partindo do primeiro galho (lado esquerdo da árvore) e fazendo um caminho completo até o final, obtemos todos os 8 elementos do espaço amostral, conforme mostra o lado direito.



Agora, vamos marcar as probabilidades nos galhos. Neste caso, por se tratar de uma moeda honesta, a probabilidade de cara e de coroa são iguais a 0,5.



Indicamos com as letras A e B os casos de interesse, de acordo com os eventos A e B definidos. Para obtermos as probabilidades de cada evento, basta somarmos os resultados indicados na árvore:

P(A) = 4 . 0,125 = 0,5 ou 50% e

P(B) = 2 . 0,125 = 0,25 ou 25%.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

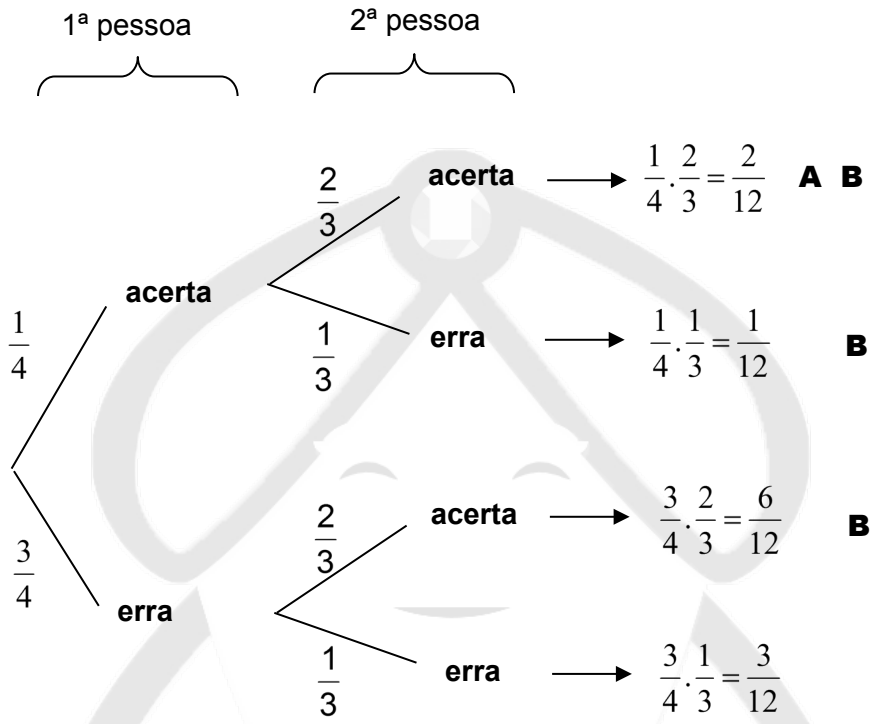
Exemplo 19

Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade da 1ª atingir o alvo é P(A) = $\frac{1}{4}$ e a probabilidade da 2ª atingir o alvo é P(B) = $\frac{2}{3}$. Admitindo A e B independentes, se as duas derem um tiro ao alvo cada uma, qual a probabilidade de:

a) ambas atingirem o alvo?
b) ao menos uma atingir o alvo?

Vamos resolver, novamente, este exemplo usando a árvore de modo a tornar a resolução por este método prática mais clara. Primeiro, construímos a árvore com as possibilidades, marcando em seguida, nos galhos, as

probabilidades de ocorrência. A seguir, calculamos as probabilidades de cada caminho, bastando multiplicar as probabilidades anotadas em cada galho:



As letras ao lado direito indicam os casos de interesse para respondermos aos itens a e b do enunciado. Assim:

a) P(ambas acertarem) = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

b) P(ao menos uma acertar) = $\frac{2}{12} + \frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

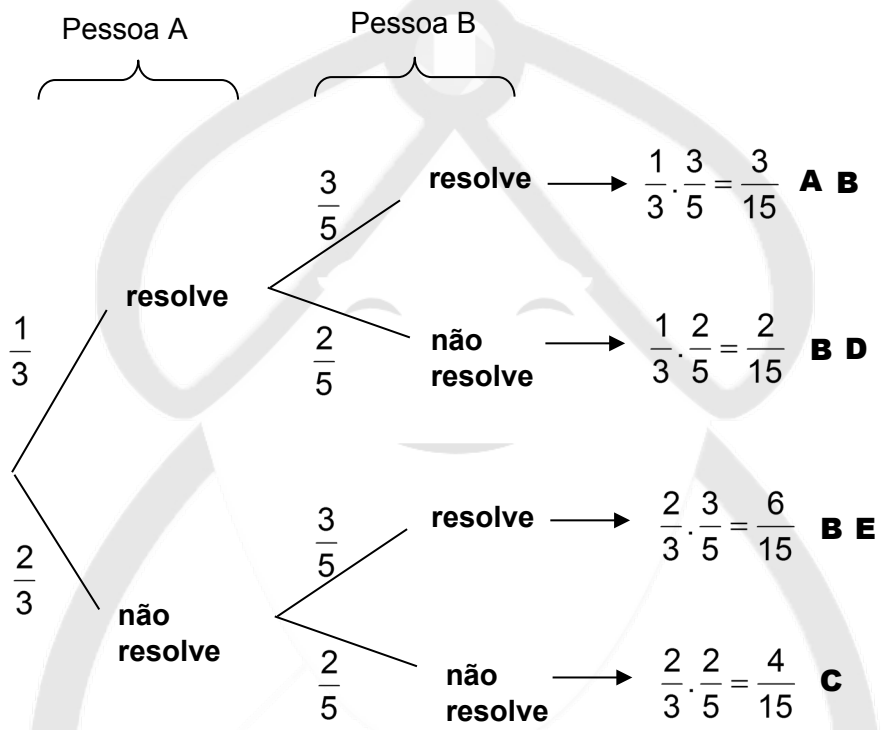
Exemplo 20

As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são: P(A) = $\frac{1}{3}$ e P(B) = $\frac{3}{5}$. Admitindo que as duas pessoas tentem resolver o problema de forma independente, qual a probabilidade de que:

a) ambos resolvam o problema?

b) ao menos um resolva o problema?
c) nenhum resolva o problema?
d) A resolva o problema, mas B não?
e) B resolva o problema, mas A não?

Vamos construir a árvore de probabilidades:



As probabilidades pedidas são:

a) P(ambos resolvam) = $\frac{3}{15}$.

b) P(ao menos um resolva) = $\frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$.

c) P(nenhum resolva) = $\frac{4}{15}$.

d) P(A resolva e B não) = $\frac{2}{15}$.

e) P(A não resolva e B resolva) = $\frac{6}{15}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

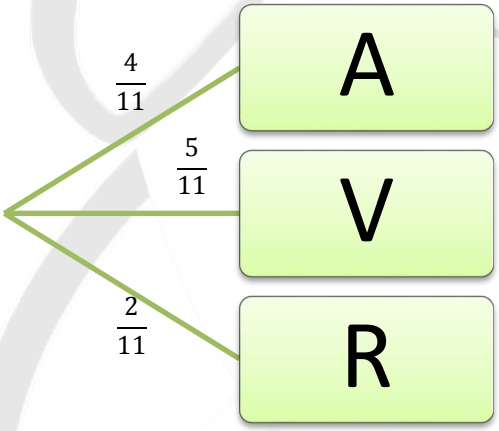
Exemplo 21

Suponhamos uma urna contendo bolas idênticas sendo: 4 azuis, 5 vermelhas e 2 roxas. São extraídas 2 bolas sem reposição. Calcule a probabilidade de:

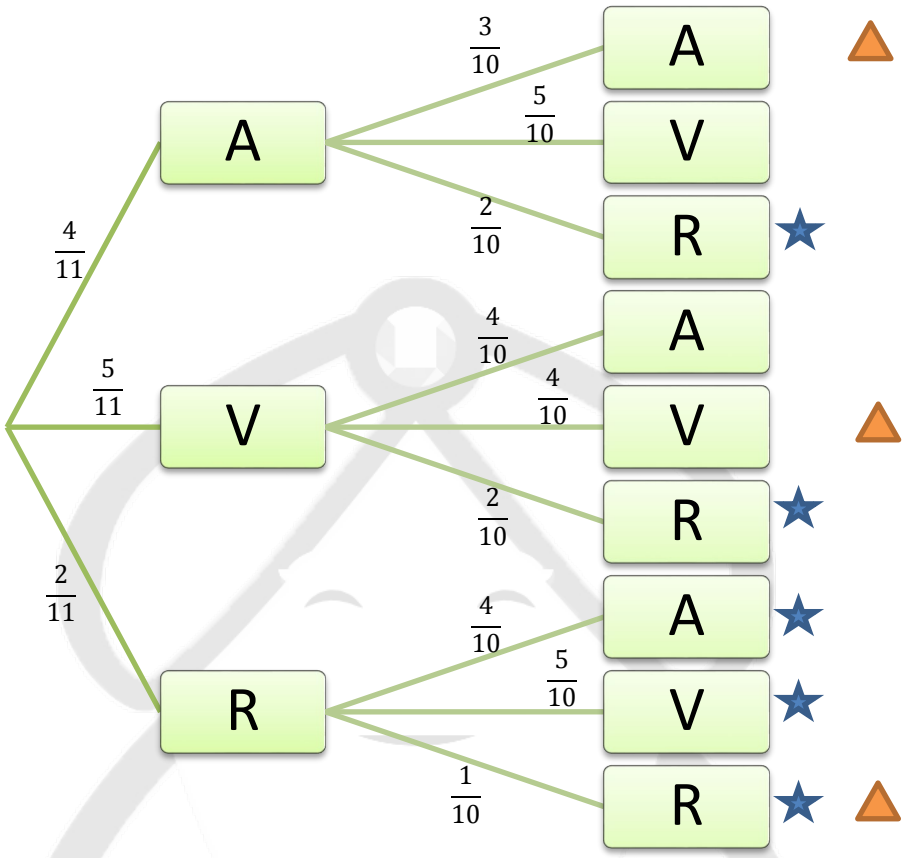
a) ser extraída ao menos 1 bola roxa;
b) as duas bolas serem da mesma cor.

Inicialmente, devemos verificar que esta situação trata de um caso de dependência, visto que as bolas são extraídas sem reposição. Ou seja, por exemplo, a probabilidade de retirarmos a 1ª bola e ela ser azul é diferente da probabilidade de a 2ª bola a ser retirada ser azul.

Vamos construir a árvore de probabilidades por etapas. Na primeira retirada, existem 4+5+2 = 11 bolas na urna. Chamemos as cores das bolas de A, V e R para azul, vermelha e roxa, respectivamente. Assim, teremos as seguintes probabilidades:



Na segunda retirada, devemos observar que a 1ª bola não será reposta. Logo, teremos, ao todo, 10 bolas na urna. Se a primeira bola retirada foi a azul, passáramos a ter 3 bolas azuis, 5 vermelhas e 2 roxas dentro da urna. Porém, se a bola retirada foi a vermelha, teremos 4 azuis, 4 vermelhas e 2 roxas. Seguindo essa lógica, podemos escrever as probabilidades para as segundas retiradas:



Para responder ao item **a**, devemos multiplicar as probabilidades dos galhos da árvore em todos os caminhos indicados com a estrela e somar esses resultados. Assim:

$$P\left(\begin{matrix}ao\ menos\\ 1\ roxa\end{matrix}\right) = \frac{4}{11}\cdot\frac{2}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{38}{110} \cong 0{,}345$$

Já para respondermos ao item **b**, vamos realizar o mesmo procedimento mas com os caminhos indicados com um triângulo:

$$P\left(\begin{matrix}2\ bolas\ da\\ memas\ cor\end{matrix}\right) = \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{34}{110} \cong 0{,}309$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

10. Exercícios

1) Lança-se um dado ao acaso. Determine a probabilidade de se obter na face superior:

a) o número 2;
b) um número maior que 4;
c) um múltiplo de 3;
d) um divisor de 20;
e) um número ímpar;
f) um número par;
g) um número primo;
h) um número maior ou igual a 6;
i) um número maior que 6.

2) Um baralho tem 52 cartas, das quais 4 são reis e 4 são valetes. Retira-se uma carta ao acaso. Determine a probabilidade de:

a) de ser retirado um rei
b) não ser retirado um valete

3) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores de 30, determine a probabilidade de que ele seja primo.

4) (Unesp-SP) João lança um dado sem que Antônio veja. João diz que o número mostrado pelo dado é par. A probabilidade de Antônio descobrir esse número é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{36}$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

5) Determine a probabilidade de se obterem os eventos a seguir, no lançamento simultâneo de 2 dados, observadas as faces voltadas para cima.

a) números iguais;
b) números diferentes;
c) números cuja soma é igual a 5;
d) números cujo produto é par;
e) números cuja soma é ímpar;
f) números cuja soma é menor que 12;
g) números cuja soma é maior que 12;
h) números primos nos 2 dados.

6) Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Retirando-se ao acaso uma bolinha da urna, qual a probabilidade de essa bolinha ter um número múltiplo de 4 ou de 3?

7) A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%. Qual é a probabilidade de o cavalo vencer exatamente três corridas?

8) Num dominó (28 peças),qual é a probabilidade de, escolhendo uma peça ao acaso, retiramos uma que tenha repetição de números (0-0, 1-1, ..., 6-6)?

9) (FGV-SP) Uma fatia de pão com manteiga pode cair no chão de duas maneiras apenas:

- com a manteiga para cima (evento A);
- com a manteiga para baixo (evento B).

Uma possível distribuição de probabilidade para esses eventos é:

a) P(A) = P(B) = 3/7
b) P(A) = 0 e P(B) = 5/7
c) P(A) = –0,3 e P(B) = 1,3
d) P(A) = 0,4 e P(B) = 0,6
e) P(A) = 6/7 e P(B) = 0

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

10) Numa cidade com 1000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos, A e B. É feita uma prévia em que os 1000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Qual é a probabilidade de que A ganhe a eleição?

11) Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%, a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença só no 3° mês é igual a:

a) 21%
b) 49%
c) 6,3%
d) 14,7%
e) 26%

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

12) (VUNESP) A eficácia de um teste de laboratório para checar certa doença nas pessoas que comprovadamente têm essa doença é de 90%. Esse mesmo teste, porém, produz um falso-positivo (acusa positivo em quem não tem comprovadamente a doença) da ordem de 1%. Em um grupo populacional em que a incidência dessa doença é de 0,5%, seleciona-se uma pessoa ao acaso para fazer o teste. Qual a probabilidade de que o resultado desse teste venha a ser positivo?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

13) Jogando 3 dados simultaneamente, qual a probabilidade de se obter soma menor ou igual a 4 ?

14) Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório. Consideremos a seguinte distribuição de probabilidades: P(a) = 1/8, P(b) = 1/8, P(c) = 1/4, P(d) = x. Determine o valor de x.

15) Dos 100 alunos de uma turma, 40 gostam de Álgebra, 30 gostam de Geometria, 10 gostam de Álgebra e Geometria, e há os que não gostam de Álgebra nem de Geometria. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele gostar de:

a) Álgebra?
b) Geometria?
c) Álgebra e Geometria?
d) Álgebra ou Geometria?

16) Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3 e outra urna com 5 bolas numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola de cada uma, a probabilidade da soma dos pontos ser maior do que 4 é:

a) 3/5
b) 2/5
c) 1/2
d) 1/3
e) 2/3

17) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

18) (UFSCar-SP) Uma urna tem 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, determine a probabilidade de não obtermos a bola número 7.

19) (FGV-SP) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, determine a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8.

20) (F. Objetivo-SP) Um dado honesto tem suas faces numeradas de 1 a 6. Joga-se este dado duas vezes consecutivas. Determine a probabilidade de obter um número par no primeiro lançamento e um número maior ou igual a 5 no segundo lançamento.

21) (CESGRANRIO-RJ) Dois dados são lançados sobre uma mesa. Determine a probabilidade de ambos dados mostrarem, na face superior, números ímpares.

22) De um grupo de 200 pessoas, 160 têm fator Rh positivo, 100 têm sangue tipo O e 80 têm fator Rh positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

a) seu sangue ter fator Rh positivo?
b) seu sangue não ser tipo O?
c) seu sangue ter fator Rh positivo ou ser tipo O?

23) Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer cara no lançamento dessa moeda;
b) ocorrer coroa no lançamento dessa moeda.

24) Os jogadores A, B, C e D disputam um torneio onde A e B têm “chances” iguais, C e D também têm “chances” iguais, mas A tem o dobro das “chances” de C. Qual a probabilidade de B vencer? Qual a probabilidade de D vencer?

25) (UFR-RJ) Os cavalos X, Y e Z disputam uma prova ao final da qual não poderá ocorrer empate. Sabe-se que a probabilidade de X vencer é igual ao dobro da probabilidade de Y vencer. Da mesma forma, a probabilidade de Y vencer é igual ao dobro da probabilidade de Z vencer. Calcule a probabilidade de:

a) X vencer;
b) Y vencer;
c) Z vencer.

26) (UF-PI) No lançamento de um dado vicioso, as faces diferentes de 5 ocorrem com probabilidade p, enquanto a face 5 ocorre com a probabilidade 3p. Assim sendo, determine o valor de p.

27) No lançamento de uma moeda defeituosa, qual a probabilidade de sair cara, sabendo-se que esta é o sêxtuplo da probabilidade de sair coroa?

28) Três carros, A, B e C, participam de uma corrida. A tem duas vezes mais probabilidades de ganhar que B e B tem três vezes mais probabilidades de ganhar que C. Determine as probabilidades de vitória de cada carro.

29) Lança-se um dado viciado, de forma que cada número par sai o triplo de vezes que cada número ímpar.

a) qual a probabilidade de ocorrer um número ímpar? E um número par?
b) Qual a probabilidade de ocorrer um número menor que 4?
c) Qual a probabilidade de que saia um número múltiplo de 2 ou 3?

30) Três corredores, A, B e C, participam de uma competição. A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem quatro vezes mais probabilidades de vencer do que C. Calcule P(A), P(B) e P(C).

31) Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 pretas. Outra urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola também ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos:

a) urna I e bola vermelha?
b) urna I e bola preta?
c) urna II e bola vermelha?
d) urna II e bola preta?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

32) Uma urna tem 8 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra é escolhida, também ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a 1ª bola ser vermelha e a 2ª branca?
b) a 1ª bola ser branca e a 2ª vermelha?
c) a 1ª e a 2ª serem vermelhas?
d) saírem uma bola vermelha e uma bola branca?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

33) A urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 2 bolas vermelhas e 6 brancas e a urna III tem 5 bolas vermelhas, 2 brancas e 3 amarelas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola, também ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser:

a) vermelha?
b) branca?
c) amarela?

34) Em um lote da fábrica A existem 18 peças boas e 2 defeituosas. Em outro lote da fábrica B, existem 24 peças boas e 6 defeituosas, e em outro lote da fábrica C, existem 38 peças boas e 2 defeituosas. Um dos 3 lotes é sorteado ao acaso e dele é extraída uma peça ao acaso. Qual a probabilidade de a peça ser:

a) boa?
b) defeituosa?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

35) (EU-RJ)

> *Protéticos e dentistas dizem que a procura por dentes postiços não aumentou. Até declinou um pouquinho. No Brasil, segundo a Associação Brasileira de Odontologia (ABO), há 1,4 milhão de pessoas sem nenhum dente na boca, e 80% delas já usam dentadura. Assunto encerrado.*
>
> (Adaptado de: *Veja*, outubro de 1997)

Considere que a população brasileira seja de 160 milhões de habitantes. Escolhendo ao acaso um desses habitantes, a probabilidade de que ele não possua nenhum dente na boca e use dentadura, de acordo com a ABO, é de:

a) 0,28%
b) 0,56%
c) 0,70%
d) 0,80%

36) (UMC-SP) Escolhendo ao acaso uma pessoa numa certa população, a probabilidade de ela ser surda é de 0,004, a probabilidade de ela ser cega é 0,007 e a probabilidade de ela ser surda e cega é de 0,0006. A probabilidade de ela ser cega ou surda é:

a) 0,0116
b) 0,005
c) 0,011
d) 0,0104
e) 0,0011

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

37) A probabilidade de certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de certa data, é 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?
b) ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

38) A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é P(A) = 1/2, a de que outro aluno B resolva é P(B) = 1/3 e a de que um terceiro aluno C o resolva é P(C) = 1/4. Qual a probabilidade de que:

a) os três resolvam o problema?
b) ao menos um resolva o problema?

39) Renato tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de convidar Alice para um passeio num domingo. A probabilidade de que César a convide é $\frac{2}{5}$ e a de Olavo é $\frac{1}{2}$. Admitindo que cada um deles realize o convite de modo independente, qual a probabilidade de que:

a) os três a convidem para o passeio?
b) nenhum a convide para o passeio?
c) ao menos um a convide para o passeio?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

40) Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos.

a) Selecionando-se um estudante ao acaso, qual a probabilidade de que ele estude inglês ou espanhol?

b) Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?

41) As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema de modo independente uma da outra são: P(A) = $\frac{1}{3}$ e P(B) = $\frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) ambos resolvam o problema?
b) ao menos um resolva o problema?
c) nenhum resolva o problema?
d) A resolva o problema, mas B não?
e) B resolva o problema, mas A não?

42) Uma moeda não viciada é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de:

a) observarmos 10 caras?
b) observarmos 10 coroas?
c) observarmos 6 caras e 6 coroas?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

43) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Retira-se uma bola aleatoriamente. Sejam os eventos:

A: a bola retirada possui um número múltiplo de 2;

B: a bola retirada possui um número múltiplo de 5.

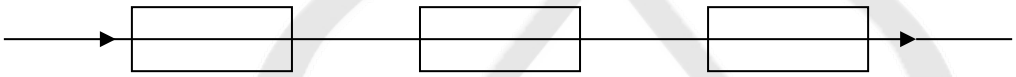
Determine a probabilidade do evento A U B.

44) Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

45) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a bola não ser amarela?
b) a bola ser branca ou preta?
c) a bola não ser branca, nem amarela?

46) Em um circuito elétrico, 3 componentes são ligados em série e trabalham independentemente um do outro. As probabilidades de falharem o 1º, 2º e 3º componentes valem respectivamente $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,1$ e $p_3 = 0,2$. Qual a probabilidade de que não passe corrente pelo circuito?

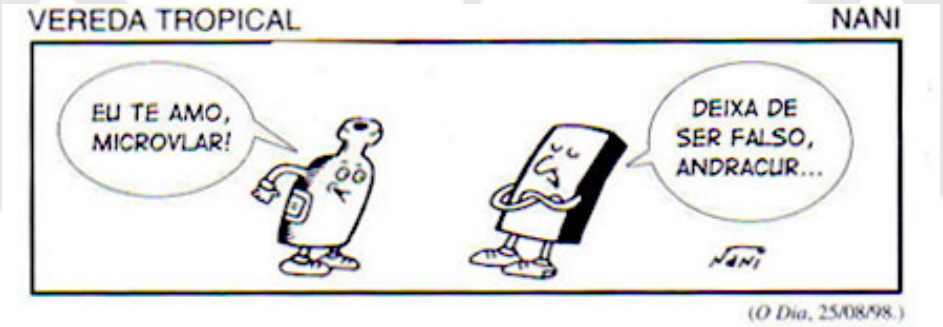


Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

47) (Vunesp-SP) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2, e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, determine a probabilidade de dois jogadores serem escalados.

48) (EU-RJ)



(O Dia, 25/08/98.)

Suponha haver uma probabilidade de 20% para uma caixa de Microvlar ser falsificada. Em duas caixas, a probabilidade de pelo menos uma delas ser falsa é:

a) 4%
b) 16%
c) 20%
d) 32%
e) 36%

49) (U. F. São Carlos-SP) Gustavo e sua irmã Caroline viajaram de férias para cidades distintas. Os pais recomendam que ambos telefonem quando chegarem ao destino. A experiência em férias anteriores mostra que nem sempre Gustavo e Caroline cumprem esse desejo dos pais. A probabilidade de Gustavo telefonar é 0,6 e a probabilidade de Caroline telefonar é 0,8. A probabilidade de pelo menos um dos filhos contatar os pais é:

a) 0,20
b) 0,48
c) 0,64
d) 0,86
e) 0,92

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

50) (Cesgranrio-RJ) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti são, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{6}$. Se cada um bater um único pênalti, determine a probabilidade de todos errarem.

51) Numa bolsa temos cinco moedas de R$ 1,00 e quatro de R$ 0,50. Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas moedas, obtermos R$ 1,50?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

52) Uma urna I contém uma bola vermelha e duas brancas. A urna II contém duas bolas vermelhas e uma branca. Tiramos aleatoriamente uma bola da urna I, colocamos na urna II e misturamos. Em seguida, tiramos aleatoriamente uma bola da urna II. Qual é a probabilidade de tirarmos uma bola branca da urna II?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

53) A probabilidade de um aluno X resolver este problema é $\frac{3}{5}$ e a do aluno Y é $\frac{4}{7}$. Qual a probabilidade de que o problema seja resolvido?

54) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair o número 5 ou um número par?

55) Um número é escolhido ao acaso no conjunto {1, 2, 3, ..., 20}. Verifique se são independentes os eventos:

a) X: o número é múltiplo de 3 e Y: o número é par.
b) M: o número é primo e N: o número é ímpar.

56) (FGV) Cada dia em que uma pessoa joga numa loteria, ela tem uma probabilidade de ganhar igual a 1/1000, independentemente dos resultados anteriores.

a) Se ela jogar 30 dias, qual a probabilidade de ganhar ao menos uma vez?
b) Qual o número mínimo de dias em que ela deverá jogar para que a probabilidade de que ela ganhe ao menos uma vez seja maior do que 0,3%?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

57) Sejam dois eventos quaisquer A e B contidos em um espaço amostral Ω de modo que P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5. Determine os maiores e menores valores possíveis para $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$. Represente cada uma das quatro situações com um diagrama.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

58) Sejam dois eventos quaisquer A e B contidos em um espaço amostral Ω de modo que P(A) = 0,75 e P(B) = 0,25. Determine os maiores e menores valores possíveis para $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$. Represente cada uma das quatro situações com um diagrama.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

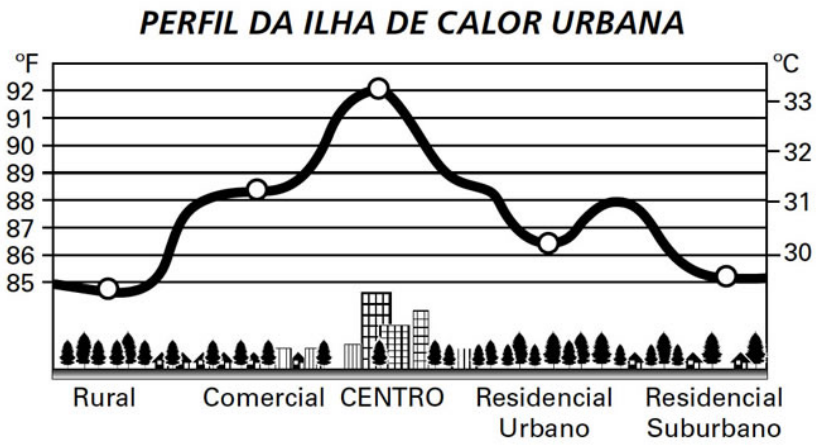
Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

59) Sejam dois eventos quaisquer A e B contidos em um espaço amostral Ω de modo que P(A) = 0,8 e P(B) = 0,6. Determine os maiores e menores valores possíveis para $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$. Represente cada uma das quatro situações com um diagrama.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

60) (ENEM) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31ºC. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) 1/5
b) 1/4
c) 2/5
d) 3/5
e) 3/4

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

61) (FUVEST) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a ou que c seja sucessor de b?

a) 4/27
b) 11/54
c) 7/27
d) 10/27
e) 23/54

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

62) (CESGRANRIO) Joga-se N vezes um dado comum, de seis faces, não viciado, até que se obtenha 6 pela primeira vez. A probabilidade de que N seja menor do que 4 é

a) 150/216
b) 91/216
c) 75/216
d) 55/216
e) 25/216

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

63) (UFMG) Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais e cartas de pares distintos são diferentes. Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de essas duas cartas serem iguais é

a) 1/100
b) 1/99
c) 1/50
d) 1/49

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

64) (FGV) Uma urna contém cinco bolas numeradas com 1, 2, 3, 4 e 5. Sorteando-se ao acaso, e com reposição, três bolas, os números obtidos são representados por x, y e z . A probabilidade de que xy + z seja um número par é de

a) 47/125
b) 2/5
c) 59/125
d) 64/125
e) 3/5

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

65) (PUCCAMP) Numa certa população são daltônicos 5% do total de homens e 0,05% do total de mulheres. Sorteando-se ao acaso um casal dessa população, a probabilidade de ambos serem daltônicos é

a) 1/1.000.
b) 1/10.000.
c) 1/20.000.
d) 1/30.000.
e) 1/40.000.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

66) (MACKENZIE) Num conjunto de 8 pessoas, 5 usam óculos. Escolhidas ao acaso duas pessoas do conjunto, a probabilidade de somente uma delas usar óculos é:

a) 15/28
b) 15/56
c) 8/28
d) 5/56
e) 3/28

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

67) (CESGRANRIO) Em uma determinada região, constatou-se que

- 25% das pessoas não praticam atividade física.
- 25% das pessoas são do sexo feminino e praticam atividade física.
- 15% das pessoas que não praticam atividade física são do sexo masculino.

Seleciona-se aleatoriamente uma pessoa dessa população.A probabilidade de que seja do sexo masculino ou que não pratique exercício físico é de

a) 15%
b) 25%
c) 72,5%
d) 75%
e) 90%

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

68) (FMP-RS) Dois professores corrigem a prova de redação de um concurso público. O professor A corrige o dobro de provas do que o professor B. Sabe-se que 60% das provas corrigidas pelo professor A tiveram nota superior a 7, enquanto apenas 20% das provas corrigidas pelo professor B tiveram nota superior a 7. Se um candidato teve conceito não superior a 7, a probabilidade de sua prova ter sido corrigida pelo professor A é:

a) 0,85571.
b) 0,75000.
c) 0,33333.
d) 0,50000.
e) 0,25000.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Respostas

1. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{6}$ i) 0
2. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{12}{13}$
3. $\frac{3}{8}$
4. D
5. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{35}{36}$ g) 0 h) $\frac{1}{4}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 29%
8. $\frac{1}{4}$
9. D
10. 1 ou 100%
11. D
12. 1,445%
13. $\frac{1}{54}$
14. x = $\frac{1}{2}$
15. a) $\frac{40}{100}$ = 40% b) $\frac{30}{100}$ = 30% c) $\frac{10}{100}$ = 10% d) $\frac{60}{100}$ = 60%
16. A

17. 8/1365
18. 0,9
19. $\frac{3}{25}$
20. $\frac{1}{6}$
21. $\frac{1}{4}$
22. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{10}$

23. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$
24. B = $\frac{1}{3}$ e C = $\frac{1}{6}$
25. a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{7}$
26. p = $\frac{1}{8}$
27. P(cara) = $\frac{6}{7} \cong 0{,}8571$
28. P(A) = $\frac{3}{5}$, P(B) = $\frac{3}{10}$ e P(C) = $\frac{1}{10}$
29. a) P(ímpar) = $\frac{1}{4}$ e P(par) = $\frac{3}{4}$
b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{6}$
30. P(A) = $\frac{4}{9}$, P(B) = $\frac{4}{9}$ e P(C) = $\frac{1}{9}$
31. a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{8}$
32. a) $\frac{4}{35}$ b) $\frac{4}{35}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{48}{210}$
33. a) $\frac{11}{28}$ b) $\frac{71}{140}$ c) $\frac{1}{10}$
34. a) $\frac{53}{60}$ b) $\frac{7}{60}$
35. C
36. D
37. a) 0,20 b) 0,70
38. a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{3}{4}$
39. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{9}{40}$ c) $\frac{31}{40}$
40. a) 3/10 b) 2/5
41. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{11}{15}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{2}{5}$
42. a) $\frac{1}{1024}$ b) $\frac{1}{1024}$ c) 0
43. $\frac{3}{5}$
44. 4/11
45. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{3}$
46. 0,352
47. 0,56
48. E
49. E
50. $\frac{1}{20}$

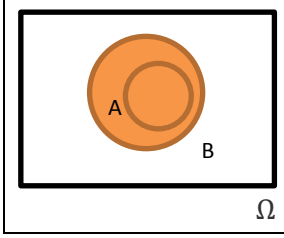
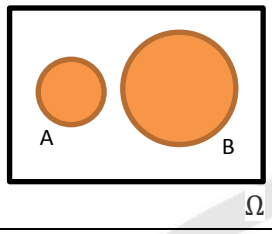
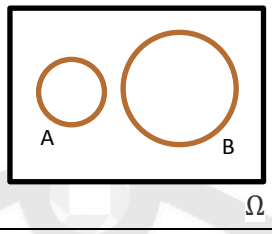
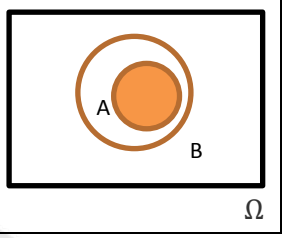
51. $\frac{5}{9}$
52. $\frac{5}{12}$
53. $\frac{29}{35}$
54. $\frac{2}{3}$
55. a) independentes

b) dependentes

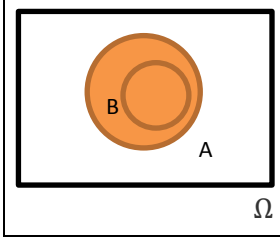
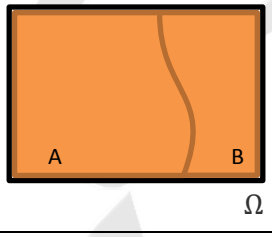
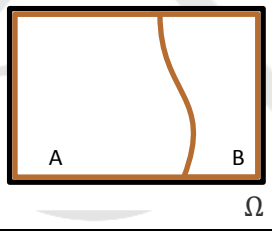
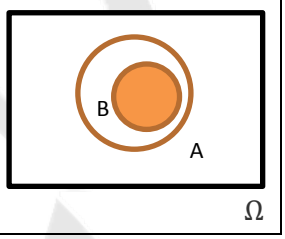
56. a) $1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{30} \cong 0{,}0296$

b) $n > \frac{\ln 0{,}997}{\ln 0{,}999} \cong 3{,}003$. Logo: 4 dias.

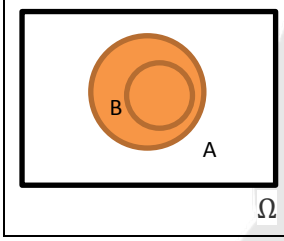
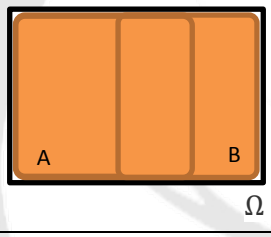
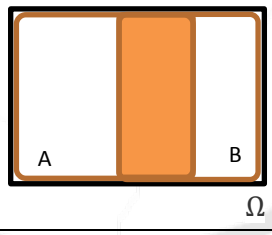
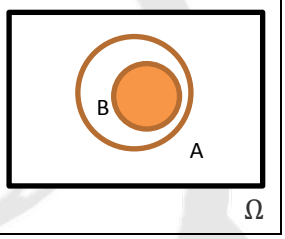
57.

mín $P(A \cup B) = 0{,}5$	máx $P(A \cup B) = 0{,}8$	mín $P(A \cap B) = 0$	máx $P(A \cap B) = 0{,}3$
			

58.

mín $P(A \cup B) = 0{,}75$	máx $P(A \cup B) = 1$	mín $P(A \cap B) = 0$	máx $P(A \cap B) = 0{,}25$
			

59.

mín $P(A \cup B) = 0{,}8$	máx $P(A \cup B) = 1$	mín $P(A \cap B) = 0{,}4$	máx $P(A \cap B) = 0{,}6$
			

60. E
61. C
62. B
63. B
64. C
65. E
66. A
67. D
68. D

Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru